Einführung in die Physik

Wolfgang Schmidt

Technikerschule Bochum
1972

Maßeinheiten:

MKS - System: M ≙ Meter , K ≙ kg , S ≙ Sekunde

cgs - System: c ≙ cm , g ≙ Gramm, s ≙ Sekunde

Im MKS - System werden alle Maßeinheiten aus Meter, Kilogramm und Sekunde gebildet.
Für das cgs - System gilt Entsprechendes.

Größe	Symbol	Maßeinheit	
		MKS	cgs
Strecke	s	[m]	[cm]
Fläche	A	[m²]	[cm²]
Volumen	V	[m³]	[cm³]
Zeit	t	[s]	[s]
Masse	m	[kg]	[g]

zusammengesetzte Maßeinheiten

Größe	Symbol	Maßeinheit MKS	Maßeinheit cgs
Geschwindigkeit	v	$\left[\frac{m}{s}\right]$	$\left[\frac{cm}{s}\right]$
Beschleunigung	a	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$	$\left[\frac{cm}{s^2}\right]$
Kraft	F	$\left[N = \frac{kg \cdot m}{s^2}\right]$	$\left[dyn = \frac{g \cdot cm}{s^2}\right]$
Arbeit	W	$\left[J = Nm = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}\right]$	$\left[erg = dyn \cdot cm = \frac{g \cdot cm^2}{s^2}\right]$
Leistung	P	$\left[W = \frac{J}{s} = \frac{N \cdot m}{s} = \frac{kg \cdot m^2}{s^3}\right]$	$\left[\frac{erg}{s} = \frac{dyn \cdot cm}{s} = \frac{g \cdot cm^2}{s^3}\right]$

Erläuterung: [N] = Newton , [J] = Joule , [W] = Watt

Umrechnung von Maßeinheiten

$1\,km = 1000\,m$

$1\,m = 100\,cm = 10\,dm$

$1\,cm = 10\,mm$

$1\,mm = 1000\,\mu m$

$1\,km^2 = 1\,000\,000\,m^2 = 10^6\,m^2$

$1\,m^2 = 10\,000\,cm^2 = 10^4\,cm^2$

$1\,cm^2 = 100\,mm^2 = 10^2\,mm^2$

$1\,mm^2 = 1\,000\,000\,\mu m^2 = 10^6\,\mu m^2$

$1\,t = 1000\,kg$

$1\,kg = 1000\,g$

$1\,g = 1000\,mg$

$1\,mg = 1000\,\mu g$

Dividiert man die beiden Seiten einer Maßeinheitengleichung, so ist dieses Verhältnis immer 1.

$1\,km = 1000\,m$ $\qquad \frac{1\,km}{1000\,m} = 1 \qquad \frac{1000\,m}{1\,km} = 1$

Daß man mit 1 alles multiplizieren darf, ohne dabei etwas zu verändern, bzw. falsche zu machen, kann man zur Umrechnung von Maßeinheiten benützen.

geg. 600 m

ges. x km

$1\,km = 1000\,m$ $\qquad 600\,\text{m} \cdot \frac{1\,km}{1000\,\text{m}} = \frac{600}{1000}\,km = 0.6\,km$

$\underline{\underline{600\,m = 0.6\,km}}$

geg. $100\ \frac{km}{h}$

ges. $x\ \frac{m}{s}$

$1\,km = 1000\,m$ $\qquad 100\ \frac{km}{h} \cdot \frac{1000\,m}{1\,km} \cdot \frac{1\,h}{3600\,s} = \frac{100}{3.6}\ \frac{m}{s}$

$1\,h = 3600\,s$

$\underline{\underline{100\ \frac{km}{h} = 27.8\ \frac{m}{s}}}$

geg. 1 Jahr

ges. x s

$1\,Jahr = 365\,Tage$ $\qquad 1\,Jahr \cdot \frac{365\,Tage}{1\,Jahr} \cdot \frac{24\,h}{1\,Tag} \cdot \frac{3600\,s}{1\,h} =$

$1\,Tag = 24\,h$

$1\,h = 3600\,s$ $\qquad = 365 \cdot 24 \cdot 3600\,s = 31\,536\,000\,s$

$\underline{\underline{1\,Jahr = 31\,536\,000\,s}}$

Thema 1: Bewegungsgleichungen

Geschwindigkeit : v

Def.:

$$v = \frac{s}{t}$$

$$s = v \cdot t \qquad t = \frac{s}{v}$$

v = Geschwindigkeit $[\frac{m}{s}]$
s = Strecke $[m]$
t = Zeit $[s]$

Hinweis: Ändert sich die Geschwindigkeit während der Zeit t, so muß mit der mittleren Geschwindigkeit gerechnet werden.

Mittlere Geschwindigkeit : $\bar{v}$

Def.:

$$\bar{v} = \frac{v_e + v_a}{2}$$

$\bar{v}$ = mittlere Geschwindigkeit $[\frac{m}{s}]$
v_e = Endgeschwindigkeit $[\frac{m}{s}]$
v_a = Anfangsgeschwindigkeit $[\frac{m}{s}]$

Beschleunigung : a

Def.:

$$a = \frac{v_e - v_a}{t}$$

a = Beschleunigung $[\frac{m}{s^2}]$
v_e = End-
v_a = Anfangsgeschw. $[\frac{m}{s}]$
t = Beschleunigungszeit $[s]$

$$v_e = a \cdot t + v_a$$

$$v_a = v_e - a \cdot t$$

$$t = \frac{v_e - v_a}{a}$$

Thema 2 Dynamisches Grundgesetz

Zwischen der trägen Masse m, der Bewegung dieser Masse in Form von Beschleunigung a und der dazu benötigten Kraft F gilt die Beziehung:

$$F = m \cdot a$$

F = zur Bewegung benötigte Kraft [N]
m = träge Masse [kg]
a = Beschleunigung $[\frac{m}{s^2}]$

umgeformt gilt:

$$m = \frac{F}{a} \quad \text{und} \quad a = \frac{F}{m}$$

Maßeinheiten der Kraft F:

1. N = Newton $\quad 1\,N = 1\,\frac{kg \cdot m}{s^2}$
2. kp = Kilopond $\quad$ 1kp ist die Kraft, mit der 1kg von der Erde angezogen wird.
3. dyn $\quad 1\,dyn = 1\,\frac{g \cdot cm}{s^2}$

Beziehung zwischen Kp und N

Alle Körper fallen im luftleeren Raum mit einer Beschleunigung von $9{,}81\,\frac{m}{s^2}$ zur Erde. Dies ist die Fallbeschleunigung, die den Buchstaben g erhält.

$$g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$$

Auch das Gewicht ist eine Kraft, und zwar die Erdanziehungskraft. Das Gewicht erhält den Buchstaben G. Setzt man G und g anstelle F und a in die Formel $F = m \cdot a$ so ergibt sich.

$$G = m \cdot g$$

G = Gewicht der Masse m [N]
m = Masse [kg]
g = Fallbeschleunigung = 9,81 $\frac{m}{s^2}$

umgeformt gilt:

$$m = \frac{G}{g} \qquad \frac{G}{m} = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$$

Gewicht der Masse 1kg:

a) $G = 1\,kg \cdot 9{,}81 \frac{m}{s^2} = 9{,}81 \frac{kg \cdot m}{s^2} = 9{,}81\,N$

$\underline{G = 9{,}81\,N}$

b) 1kg hat außerdem das Gewicht 1kp

$\underline{G = 1\,kp}$

Aus a) und b) folgt $\underline{1\,kp = 9{,}81\,N}$

umgerechnet folgt $\underline{1\,N = 0{,}102\,kp}$

Berechnung zwischen dyn und N

$1\ \text{dyn} = 1\ \frac{\text{g} \cdot \text{cm}}{\text{s}^2}$ $\qquad$ $1\ \text{N} = 1\ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$

Wird in der Formel $F = m \cdot a$

m in g und a in $\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$ eingesetzt,

so ergibt sich F zu $\frac{\text{g} \cdot \text{cm}}{\text{s}^2} = \text{dyn}$.

Das Umrechnen von N in dyn ist gleich dem Umrechnen von $\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$ in $\frac{\text{g} \cdot \text{cm}}{\text{s}^2}$.

$$1\ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1000\ \text{g}}{1\ \text{kg}} \cdot \frac{100\ \text{cm}}{1\ \text{m}} = 100\,000\ \frac{\text{g} \cdot \text{cm}}{\text{s}^2}$$

$1\ \text{kg} = 1000\ \text{g}$
$1\ \text{m} = 100\ \text{cm}$

$$1\ \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} = 100\,000\ \frac{\text{g} \cdot \text{cm}}{\text{s}^2} = 10^5\ \frac{\text{g} \cdot \text{cm}}{\text{s}^2}$$

daraus folgt:

$$\underline{\underline{1\ \text{N} = 10^5\ \text{dyn}}}$$

$$\underline{\underline{1\ \text{dyn} = 10^{-5}\ \text{N}}}$$

Thema 3: Kräfte

1. Federkraft F_F

Um eine Feder zu dehnen bzw. zusammenzudrücken, d.h. zu deformieren, benötigt man eine Kraft. Diese ist umso größer, je stärker die Feder ist und je mehr die Feder deformiert wird.

$$F_F = D \cdot x$$

F_F = Federkraft [N]

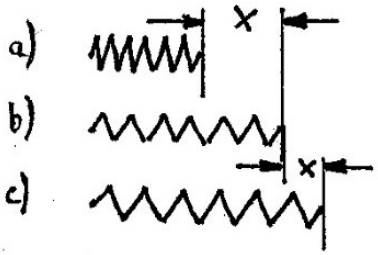
D = Federkonstante $\left[\frac{N}{m}\right]$

x = Deformationsstrecke [m]

umgeformt gilt:

$$D = \frac{F_F}{x} \quad \text{und} \quad x = \frac{F_F}{D}$$

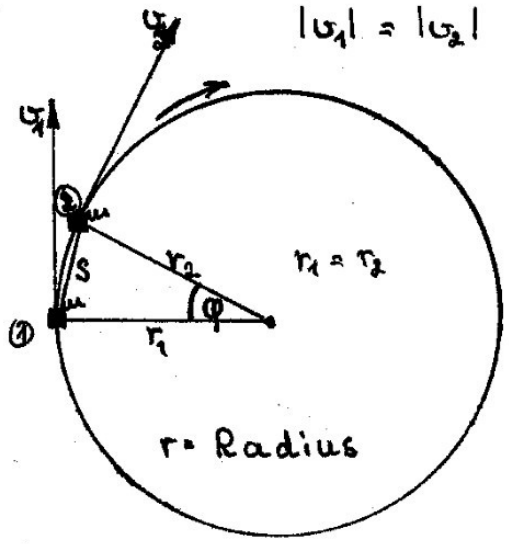
z.B.



a) Feder zusammengedrückt
b) ursprüngliche Länge
c) Feder gedehnt

Die Größe D ist eine Materialkonstante des Federmaterials, sie hängt außerdem von der Federlänge ab, bleibt aber für eine gegebene Feder konstant. Ist D groß, so hat man eine starke Feder, u.u..

2. Fliehkraft F_f



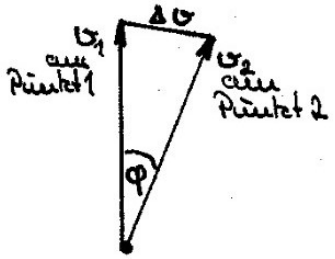
Eine Masse m bewegt sich in der Zeit t auf einem Kreis vom Punkt 1 nach 2. Dabei dreht sie sich um den Winkel φ, bezogen auf den Kreismittelpunkt.

Die Pfeile stellen den momentanen Betrag und die Richtung der Geschwindigkeit dar.
Der Betrag sei z.B. $3\ \frac{m}{s}$, $1\,cm \triangleq 1\ \frac{m}{s}$

In der Zeit t ändert sich die momentane Richtung der Geschwindigkeit um den Winkel φ.

s ist die Strecke von 1 nach 2. Diese wird gleich dem nahegelegenen Bogen, wenn φ sehr klein wird.

Macht man eine Parallelverschiebung beider Pfeile, so daß sie gleichen Ausgangspunkt haben, ergibt sich daraus die Zentripetalbeschleunigung a_f aus der Richtungsänderung.



Δv = Vektordifferenz gebildet aus der Richtungsänderung (z.B. $1\ \frac{m}{s}$), Δv ist also Änderung der Geschwindigkeit und somit selbst eine Geschwindigkeit.

Das Dreieck $v_1, \Delta v, v_2$ ist dem Dreieck r_1, s, r_2 ähnlich.
Daraus folgt: (v_1 bzw. v_2 wird einfach v genannt, r_1, r_2 ebenso)

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{s}{r}$$ außerdem ist $s = v \cdot t$ (wenn φ sehr klein wird)

zusammengefaßt gilt:

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{v \cdot t}{r} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\Delta v}{t} = \frac{v^2}{r}$$

$\frac{\Delta v}{t}$ ist aber die Geschwindigkeitsänderung pro Zeit, also die Zentripetalbeschleunigung a_f.

$$\frac{\Delta v}{t} = a_f$$

$$\boxed{a_f = \frac{v^2}{r}}$$

mit $F = m \cdot a$ bzw. $F_f = m \cdot a_f$ folgt

$$\boxed{F_f = \frac{m \cdot v^2}{r}}$$

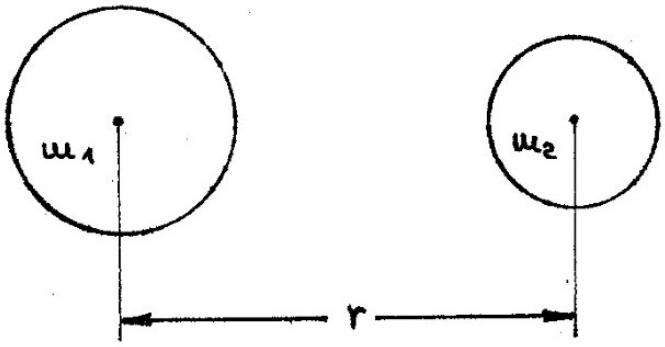
F_f = Fliehkraft [N]
v = Umlaufgeschwindigkeit $\left[\frac{m}{s}\right]$
r = Kreisradius [m]
m = Körpermasse [kg]

umgeformt gilt:

$$\boxed{m = \frac{F_f \cdot r}{v^2}} \qquad \boxed{v = \sqrt{\frac{F_f \cdot r}{m}}} \qquad \boxed{r = \frac{m \cdot v^2}{F_f}}$$

3. Gravitationskraft F_G

Zwei Massen m_1 und m_2, deren Massenschwerpunkte den Abstand r haben ziehen sich gegenseitig mit der Kraft F_G an.



$$F_G = f \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

F_G = Gravitationskraft [N]

$f = 6.664 \cdot 10^{-11} \ \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$

m_1, m_2 = Massen [kg]

r = Schwerpunktsabstand [m]

Umgeformt gilt:

$$m_1 = \frac{F_G \cdot r^2}{f \cdot m_2} \qquad m_2 = \frac{F_G \cdot r^2}{f \cdot m_1} \qquad r = \sqrt{\frac{f \cdot m_1 \cdot m_2}{F_G}}$$

Mit der Erde gilt: $F_G = G = m_1 \cdot g$ wenn m_2 = Erdmasse ist

Thema 4: Arbeit und Leistung

1. Arbeit

Def.: Arbeit = Kraft · Weg

$$W = F \cdot s$$

W = Arbeit [Nm, J, Ws]
F = Kraft [N]
s = Weg, Strecke [m]

umgeformt gilt:

$$F = \frac{W}{s} \qquad s = \frac{W}{F}$$

Maßeinheiten:

1 Nm = 1 J (Joule) = 1 Ws (Wattsekunde)

1 dyn·cm = 1 erg (cgs-System)

Beziehung zwischen Joule und erg:

$$1\ Nm = 1\ \frac{kg \cdot m^2}{s^2} \qquad 1\ dyn \cdot cm = 1\ \frac{g \cdot cm^2}{s^2}$$

$$1\ \frac{kg \cdot m^2}{s^2} \cdot \frac{1000\,g}{1\,kg} \cdot \frac{10^4\,cm^2}{1\,m^2} = 10^7\ \frac{g \cdot cm^2}{s^2}$$

$$\underline{1\ J = 10^7\ erg} \qquad \underline{1\ erg = 10^{-7}\ J}$$

Da F verschiedene Ursachen haben kann, ergeben sich mehrere Arbeiten.

a) Beschleunigungsarbeit W_a

$W = F \cdot s$ und $F = m \cdot a$ [N]

$$W_a = m \cdot a \cdot s$$

b) Hubarbeit W_h

$W = F \cdot s$ und $F = G = m \cdot g$ [N]
und $s = h$ (Hubhöhe) [m]

$$W_h = m \cdot g \cdot h$$

c) Reibungsarbeit W_R

$W = F \cdot s$ und $F = \mu \cdot G$ [N]
$F = \mu \cdot m \cdot g$ [N]
μ = Reibungsfaktor (kleiner als 1) [%]

$$W_R = \mu \cdot m \cdot g \cdot s$$

d) Federspannarbeit W_F

$W = F \cdot s$ und $F_F = D \cdot x$ mit $x = s$

da jedoch F_F beim Deformieren nicht konstant bleibt, muß man die mittlere Federkraft $\overline{F_F}$ einsetzen.

$$\overline{F_F} = \frac{F_{F1} + F_{F2}}{2}$$

F_{F1} = Federkraft bevor die Spannarbeit verrichtet wird.

F_{F2} = Federkraft nachdem die Spannarbeit verrichtet wurde.

Meistens, also wenn die Spannarbeit bei unbelasteter Feder beginnt, ist $F_{F1} = 0$, da $x = 0$ ist, dann gilt:

$$\overline{F_F} = \frac{F_{F2}}{2} \quad \text{bzw. vereinfacht} \quad \overline{F_F} = \frac{F_F}{2}$$

Daraus folgt für die Spannarbeit:

$$W_F = \overline{F_F} \cdot s \quad \text{und} \quad \overline{F_F} = \frac{F_F}{2} = \frac{D \cdot s}{2}$$

also folgt:

$$\boxed{W_F = \frac{D \cdot s^2}{2}}$$

D = Federkonstante $\left[\frac{N}{m}\right]$

s = Deformationsstrecke $[m]$

W_F = Federspannarbeit $[J]$

umgeformt gilt:

$$\boxed{D = \frac{2 \cdot W_F}{s^2}} \qquad \boxed{s = \sqrt{\frac{2 \cdot W_F}{D}}}$$

2. Leistung

Def.: Leistung = $\frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeit}}$

$$P = \frac{W}{t}$$

P = Leistung [W, $\frac{g}{s}$] W = Watt
W = Arbeit [g]
t = Zeit [s]

Umgeformt gilt:

$$W = P \cdot t \qquad t = \frac{W}{P}$$

Maßeinheiten:

$1\ W = 1\ \frac{J}{s} = 1\ \frac{N \cdot m}{s} = 1\ \frac{kg \cdot m^2}{s^3}$ (MKS-System)

$1\ \frac{erg}{s} = 1\ \frac{dyn \cdot cm}{s} = 1\ \frac{g \cdot cm^2}{s^3}$ (cgs-System)

$1\ W = 1\ A \cdot V$ (Elektrische Einheiten)

Setzt man für $W = F \cdot s$ ein ergibt sich

$P = \frac{F \cdot s}{t}$ $\frac{s}{t}$ ist aber $= v$ also gilt

$$P = F \cdot v$$

Ist z.B. v die Geschwindigkeit eines Autos, und F die Reibungskraft bei dieser Geschwindigkeit, ist P die Motorleistung, (allerdings in Watt, nicht in PS).

Umrechnen von Watt in PS

$1\ \text{Watt} = 1\ \frac{\text{Nm}}{\text{s}}$ $\qquad 1\ \text{kp} = 9{,}81\ \text{N}$

$1\ \text{PS} = 75\ \frac{\text{kpm}}{\text{s}}$

$$1\ \text{PS} = 75\ \frac{\text{kp} \cdot \text{m} \cdot 9{,}81\ \text{N}}{\text{s} \cdot 1\,\text{kp}} = 736^{*}\ \frac{\text{Nm}}{\text{s}} = 736^{*}\ \text{Watt}$$

$1\ \text{PS} = 736^{*}\ \text{Watt}$
$1\ \text{kW} = 1{,}36\ \text{PS}$

* 736

500 kg sollen mit einer Geschwindigkeit von $2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ gehoben werden. Wie groß ist die Leistung

a) in PS, über kp gerechnet

b) in Watt, über N gerechnet

a) $P = m \cdot g \cdot v$ $\qquad m \cdot g = 500\ \text{kp}$

$v = 2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$P = 500 \cdot 2\ \frac{\text{kpm}}{\text{s}}$

$P = 1000\ \frac{\text{kpm}}{\text{s}}$ $\qquad 1\ \frac{\text{kpm}}{\text{s}} = \frac{1}{75}\ \text{PS}$

$P = \frac{1000}{75} = \underline{\underline{13{,}3\ \text{PS}}}$

b) $P = m \cdot g \cdot v = 500 \cdot 9{,}81 \cdot 2 = 9810\ \text{Watt} = \underline{\underline{9{,}81\ \text{kW}}}$

Vergleichen Sie beide Ergebnisse durch Umrechnen!

Beschleunigungsleistung

$P = F \cdot v$ $\qquad F = m \cdot a$

$P = m \cdot a \cdot v$

$a = \frac{v_E - v_A}{t}$ $\qquad v = v_m$ (mittlere Geschwindigkeit)

$v_m = \frac{v_E + v_A}{2}$

$$P = m \cdot \frac{v_E - v_A}{t} \cdot \frac{v_E + v_A}{2} = \frac{m}{2 \cdot t} \left(v_E^2 - v_A^2 \right)$$

$$\boxed{P_a = \frac{m}{2 \cdot t} \left(v_E^2 - v_A^2 \right)} \quad [W]$$

Lösung über Energiesatz:

$P = \frac{E_E - E_A}{t}$ $\qquad E_E - E_A$ = Differenz der End- und Anfangsenergie

$E_E = \frac{m \cdot v_E^2}{2}$

$E_A = \frac{m \cdot v_A^2}{2}$

$$P = \frac{m \cdot v_E^2 - m \cdot v_A^2}{2 \cdot t} = \frac{m}{2 \cdot t} \left(v_E^2 - v_A^2 \right)$$

$$\boxed{P_a = \frac{m}{2 \cdot t} \left(v_E^2 - v_A^2 \right)} \quad [W]$$

Hubleistung

(z. B. Hebezeug, Berg- oder Talfahrt beim Auto)

$F = G$ (Gewicht) $\quad G = m \cdot g$

$F = m \cdot g$ und $s = h$ (Hubhöhe)

$$P_H = \frac{m \cdot g \cdot h}{t} \quad \text{bzw.} \quad P_H = m \cdot g \cdot v$$

Reibungsleistung

(z. B. Fahren und Schieben auf ebener Strecke)

$$P_R = \frac{W_R}{t} \qquad W_R = \mu \cdot m \cdot g \cdot s$$

eingesetzt:

$$P_R = \frac{\mu \cdot m \cdot g \cdot s}{t}$$

da $\frac{s}{t} = v$ ist gilt außerdem

$$P_R = \mu \cdot m \cdot g \cdot v$$

$g = 9{,}81 \ \frac{m}{s^2}$

Beispiel: v ist die Geschwindigkeit $[\frac{m}{s}]$, mit der ein Körper der Masse m [kg] auf einer ebenen Unterlage mit der Reibung μ bewegt wird.

Thema 5 Energie

Def.:

Energie ist die Fähigkeit, Arbeit zu leisten.

Energieerhaltungssatz:

Energie kann nicht verloren gehen, jedoch beliebig oft umgewandelt werden.

Energieformen:

Potentielle Energie $E_{pot} = m \cdot g \cdot h$

Kinetische Energie $E_{kin} = \frac{m \cdot v^2}{2}$

außerdem gibt es noch u. a.

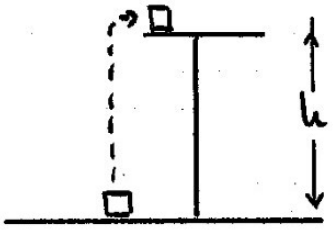
Wärmeenergie, die oft aus Reibungsarbeit entsteht.

Um einen Körper zu heben oder zu bewegen, muß man Arbeit verrichten. In dem Körper steckt dann die Energie, die der vorher an ihm verrichteten Arbeit gleich groß ist. Diese Energie kann nun wieder Arbeit leisten. Auch diese Arbeit ist ebenso groß wie die ursprüngliche.

Hubarbeit und pot. Energie

$W_H = m \cdot g \cdot h$

Diese Arbeit ist erforderlich, um eine Masse m auf die Höhe h anzuheben.



$E_{pot} = m \cdot g \cdot h$

$E_{pot} = 0$

$[E_{pot}] = J$

$[m] = kg$

$[g] = \frac{m}{s^2}$

$[h] = m$

In der Höhe h hat m die Hubenergie

$E_{pot} = W_H = m \cdot g \cdot h$

Irgendwann kann m herunterfallen und im Fallen Arbeit verrichten, z.B. Antreiben einer Uhr, Spannen einer Feder.

Fällt m dabei die gesamte Höhe h herunter so wird die gesamte Energie $E_{pot} = m \cdot g \cdot h$ frei und leistet Arbeit, (spätestens beim Aufprall).

Verrichtet m keine Arbeit, wird m beschleunigt und schlägt mit einer bestimmten Geschwindigkeit auf den Boden. $E_{pot} = m \cdot g \cdot h$ wird dann in Deformationsarbeit der Masse m und des Bodens umgesetzt.

Potentielle und kinetische Energie

Fällt die Masse m frei aus der Höhe h auf den Boden, so kann man die Endgeschwindigkeit, die sie vor dem Aufprall besitzt, errechnen. Ersetzt man dann h durch die Geschwindigkeit v erhält man die kin. Energie E_{kin}.

Beschleunigung: $a = \frac{v_e - v_a}{t}$

Ist $v_a = 0$ und nennt man v_e einfach v, gilt:

$$a = \frac{v}{t}$$

beim freien Fall ist $g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$ die wirksame Beschleunigung, statt a wird also g eingesetzt

$g = \frac{v}{t}$ (1) und umgeformt $t = \frac{v}{g}$ (1a)

außerdem gilt: $\bar{v} = \frac{h}{t}$ (2) $\left\{ \bar{v} = \text{mittlere Geschw.} \right.$

und umgeformt $h = \bar{v} \cdot t$ (2a)

mittlere Geschw. $\bar{v} = \frac{v_a + v}{2}$ (3), da aber $v_a = 0$ ist:

$$\bar{v} = \frac{v}{2} \quad (4)$$

aus (2a) + (4) folgt: $h = \frac{v}{2} \cdot t$ (5)

aus (5) und (1a) folgt: $h = \frac{v \cdot v}{2 \cdot g} = \frac{v^2}{2 \cdot g}$

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

mit $E_{pot} = m \cdot g \cdot h$ folgt

$$E_{kin} = \frac{m \cdot g \cdot v^2}{2g}$$

$$\boxed{E_{kin} = \frac{m \cdot v^2}{2}}$$

E_{kin} = kin. Energie [J]
m = Masse [kg]
v = Endgeschwindigkeit [$\frac{m}{s}$]

umgeformt gilt:

$$\boxed{m = \frac{2 \cdot E_{kin}}{v^2}} \qquad \boxed{v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{kin}}{m}}}$$

Viele Bewegungsvorgänge lassen sich mit der Gleichung

Anfangsenergie = Endenergie

lösen.

Dabei ist die Anfangsenergie die Summe aus evtl. vorhandener pot. und kin. Energie. Die Endenergie ist ebenfalls die Summe aus evtl. vorhandener pot. und kin. Energie, allerdings am Ende der Betrachtung. Manchmal kann auch noch Reibungsarbeit oder sonstige Arbeit hinzukommen, bzw. allein oder mit pot. und kin. Energie auftreten.

Umwandlung von pot. in kin. Energie und umgekehrt

1. Freier Fall, Wurf nach oben



$v = 0$ Anfang : $E_{pot} = m \cdot g \cdot h$

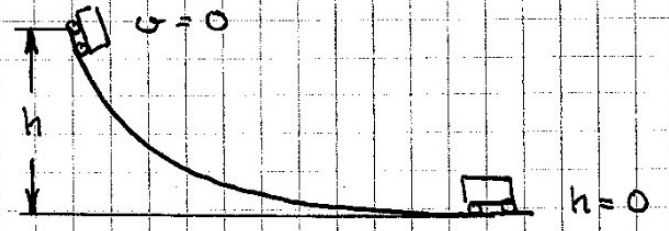
$h = 0$ Ende : $E_{kin} = \frac{m \cdot v^2}{2}$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

Steig - bzw. Fallhöhe h: $h = \frac{v^2}{2 \cdot g}$

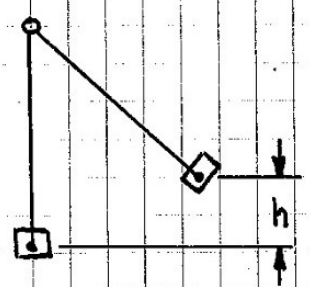
Bodengeschwindigkeit v: $v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$

1.1 Reibungsfreier Lauf an einer schiefen Ebene



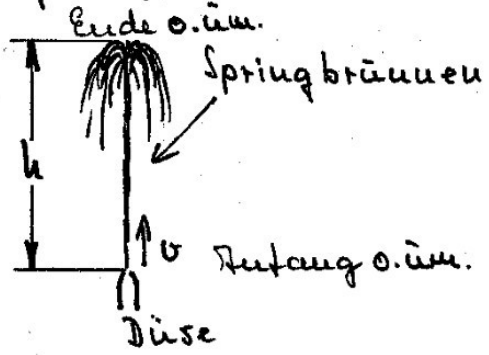
Lösung wie 1.

1.2 Pendel



Lösung wie 1.

1.) Springbrunnen

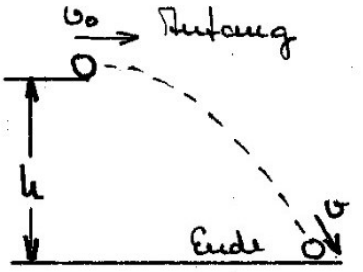


v = Austrittsgeschwindigkeit

h = Springbrunnenhöhe

Lösung wie 1.

2. Waagerechter Wurf, Wasserfall



Anfangsenergie : $m \cdot g \cdot h + \frac{m \cdot v_0^2}{2}$

Endenergie : $\frac{m \cdot v^2}{2}$

$$m \cdot g \cdot h + \frac{m \cdot v_0^2}{2} = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

$$g \cdot h + \frac{v_0^2}{2} = \frac{v^2}{2}$$

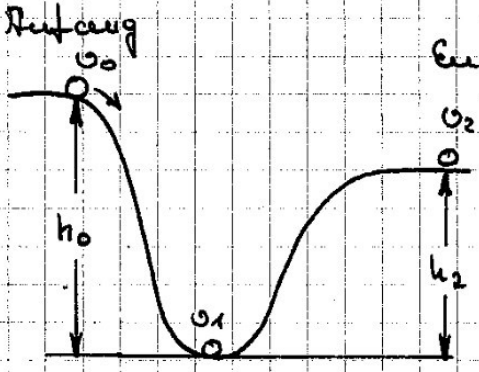
Fallhöhe h : $h = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot g}$

Anfangsgeschw. v_0 $v_0 = \sqrt{v^2 - 2gh}$

Endgeschw. : v $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$

Die Anfangsgeschwindigkeit kann waagerecht, senkrecht, lotrecht oder schräg, also in der Richtung beliebig sein.

2.1 Wurfgel. Achterbahn



v_1 nach Lösung 2.

$$\cancel{m} \cdot g \cdot h_0 + \frac{\cancel{m} \cdot v_0^2}{2} = \cancel{m} \cdot g \cdot h_2 + \frac{\cancel{m} \cdot v_2^2}{2}$$

$$g \cdot h_0 + \frac{v_0^2}{2} = g \cdot h_2 + \frac{v_2^2}{2}$$

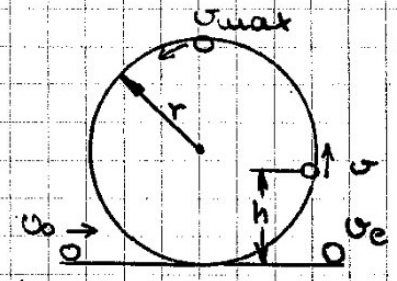
Höhe h_2: $$h_2 = h_0 + \frac{v_0^2 - v_2^2}{2 \cdot g} = h_0 - \frac{v_2^2 - v_0^2}{2 \cdot g}$$

Höhe h_0: $$h_0 = h_2 + \frac{v_2^2 - v_0^2}{2 \cdot g} = h_2 - \frac{v_2^2 - v_0^2}{2 \cdot g}$$

Geschw. v_2: $$v_2 = \sqrt{2 \cdot g (h_0 - h_2) + v_0^2}$$

Geschw. v_0: $$v_0 = \sqrt{2 \cdot g (h_2 - h_0) + v_2^2}$$

2.2 Wurfgel. Salto tauter



$$v_0 = v_e$$

Anfang

Ende $$\frac{m \cdot v_0^2}{2} = m \cdot g \cdot h + \frac{m \cdot v^2}{2}$$

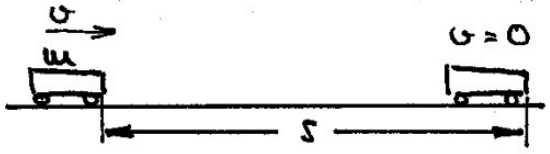
$$v_0 = \sqrt{v^2 + 2 \cdot g \cdot h}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g \cdot h}$$

$$r = \frac{v_0^2 - v_{max}^2}{4 \cdot g}$$

Umwandlung von Energie in Reibung

3. Rollen, Rutschen, Gleiten ohne Antrieb (Bremsweg)



Anfang Ende

Anf.: $\frac{m \cdot v^2}{2}$

End.: $W_R = \mu \cdot m \cdot g \cdot s$

$$\frac{m \cdot v^2}{2} = \mu \cdot m \cdot g \cdot s$$

$$\frac{v^2}{2} = \mu \cdot g \cdot s \qquad g = 9{,}81 \ \frac{m}{s^2}$$

Anfangsgeschw. v : $\quad v = \sqrt{2 \cdot \mu \cdot g \cdot s}$

Reibungszahl μ : $\quad \mu = \frac{v^2}{2 \cdot g \cdot s}$

Bremsweg s : $\quad s = \frac{v^2}{2 \cdot \mu \cdot g}$

3.1 Zusammenstoß (unelastisch), Schießen



vor dem Aufprall
Anfang

nach dem Aufprall
Ende

Anf.: $\frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2}$

End.: $\frac{(m_1 + m_2) \, v_3^2}{2} + W$

$$\frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} = \frac{(m_1 + m_2)\, v_3^2}{2} + W$$

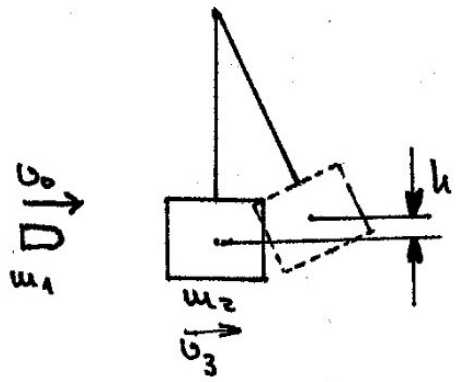
Deformationswärme W:

$$W = \frac{m_1 (v_1^2 - v_3^2) + m_2 (v_2^2 - v_3^2)}{2}$$

Aufangsgeschw. v_1: $\quad v_1 = \sqrt{v_3^2 + \frac{m_2}{m_1} (v_3^2 - v_2^2) + \frac{2 \cdot W}{m_1}}$

Endgeschw. v_3: $\quad v_3 = \sqrt{\frac{m_1 \cdot v_1^2 + m_2 \cdot v_2^2 - 2 \cdot W}{m_1 + m_2}}$

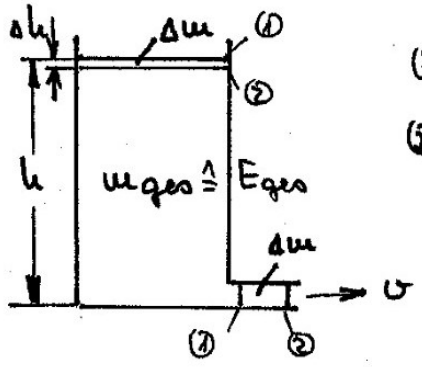
3.2 Schießen in einen hängenden Sandsack (Bestimmen der v_0 von Waffen)



v_3 wie Lösung 3.1

h aus v_3 wie Lösung 1.2

4. Rückstoßgeschwindigkeit aus einem Behälter (Reibungsfrei)



① Anfang: E_{ges} (= Gesamtenergie von m_{ges})

② Ende: $E_{ges} + \frac{\Delta m \cdot v^2}{2} - \Delta m \cdot g \cdot h$

$$E_{ges} = E_{ges} + \frac{\Delta m \cdot v^2}{2} - \Delta m \cdot g \cdot h$$

v: $\quad v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}$

h: $\quad h = \frac{v^2}{2g}$

Thema 6

Flüssigkeiten

Druck p:

$$\text{Druck } p = \frac{\text{Kraft } F}{\text{Fläche } A}$$

$$\boxed{p = \frac{F}{A}}$$

$[p] = \frac{N}{m^2} = Pa$ (Pascal)
$[F] = N$
$[A] = m^2$

$1 \frac{N}{m^2} = 1\ Pa$

Mit Geräten oder in Lehrbüchern, die noch nicht auf dem neuesten Stand sind, findet man für den Druck die Maßeinheit $\frac{kp}{cm^2} = at$. Mit ati bezeichnet man den Druck, den ein Behälter mehr hat als die Atmosphäre. (s. Bädr S. 95)

$1\ at = 1 \frac{kp}{cm^2} = 735{,}6\ mm\ Hg$ | (735,6 mm Quecksilber haben den hydrostatischen Druck $1 \frac{kp}{cm^2}$)
$1\ ata$ = Atmosphärendruck | (Luftdruck = hydrostatischer Druck der Luft über uns.)

$1\ ata = 760\ mm\ Hg = 760\ Torr$ (andere Bezeichnung)

1 ata ist ungefähr 1 at, so daß der Atmosphärenüberdruck (ati) auf at bezogen wird.

9 ati = 10 at
3 ati = 4 at

d.h. ati = at - 1
at = ati + 1

$1\ Pa = 1.02 \cdot 10^{-5}\ at$ bzw. $1\ at = 9{,}81 \cdot 10^{4}\ Pa$

Das ist ein ungünstiger Umrechnungsfaktor von der bisher üblichen Einheit at und der neuen Einheit Pa. Daher hat man die Einheit bar eingeführt und definiert:

$$1\ bar = 10^5 \frac{N}{m^2} = 10^5\ Pa$$

Dann wird daraus:

$$1\ bar = 1.02\ at$$

Dadurch hat man in der neuen Druckeinheit bar das kp vermieden und gleichzeitig einen einfachen Umrechnungsfaktor (1.02) gewonnen.

Umrechnung von Druckeinheiten

	atm	at	Pa	$\frac{kp}{m^2}$	bar	mm Hg
1 atm =	1	1.033	$1.013 \cdot 10^5$	$1.033 \cdot 10^4$	1.013	760
1 at =	0,968	1	$9.81 \cdot 10^4$	10^4	0,981	735,6
1 Pa =	$0{,}986 \cdot 10^{-5}$	$1.02 \cdot 10^{-5}$	1	0,102	10^{-5}	$0{,}75 \cdot 10^{-2}$
$1 \frac{kp}{m^2}$ =	$0{,}968 \cdot 10^{-4}$	10^{-4}	9,81	1	$9{,}81 \cdot 10^{-5}$	0,0736
1 bar =	0,987	1.02	10^5	$1.02 \cdot 10^4$	1	750,06
1 mm Hg =	$1{,}316 \cdot 10^{-3}$	$1.36 \cdot 10^{-3}$	$1.33 \cdot 10^2$	13,595	$1.33 \cdot 10^{-3}$	1

Dichte ϱ

Def. $\boxed{\varrho = \frac{m}{V}}$

$[\varrho] = \frac{kg}{m^3}$ (Rho)

$[m] = kg$

$[V] = m^3$

Wichte, spez. Gewicht: γ (Gamma)

Def.

$$\boxed{\gamma = \frac{G}{V}}$$

γ = Wichte, spez. Gewicht $\left[\frac{N}{m^3}\right]$

G = Gewicht $[N]$

V = Volumen $[m^3]$

Häufig verwendet man für ϱ die Maßeinheit $\frac{p}{cm^3}$ und für γ die Maßeinheit $\frac{p}{cm^3}$

$$1\ \frac{p}{cm^3} = 1000\ \frac{kp}{m^3} \qquad 1\ \frac{p}{cm^3} = 1000\ \frac{kp}{m^3} = 9810\ \frac{N}{m^3}$$

Hat ein Körper z.B. die Dichte $7.82\ \frac{p}{cm^3}$ so beträgt sein spez. Gewicht ebenfalls $7.82\ \frac{p}{cm^3}$. Im MKS-System ist das Umrechnen nicht so einfach:

$G = m \cdot g$, damit gilt $\gamma = \frac{m \cdot g}{V}$

für $\frac{m}{V}$ kann aber ϱ gesetzt werden, da $\varrho = \frac{m}{V}$ ist, dann folgt

$$\boxed{\gamma = g \cdot \varrho}$$

$[\gamma] = \frac{N}{m^3}$ nichts anderes

$[\varrho] = \frac{kg}{m^3}$ " "

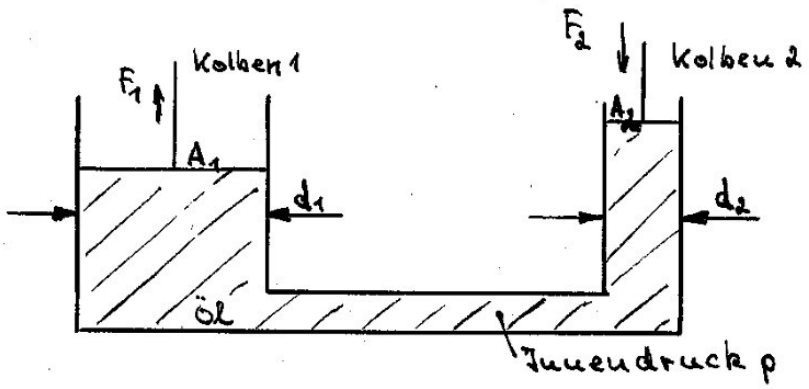
Umgeformt gilt:

$$\boxed{m = \varrho \cdot V} \qquad \boxed{G = \gamma \cdot V} \qquad \boxed{\varrho = \frac{\gamma}{g}}$$

$$\boxed{V = \frac{m}{\varrho}} \qquad \boxed{V = \frac{G}{\gamma}} \qquad \boxed{g = \frac{\gamma}{\varrho}}$$

Hydraulische Anlagen

1. Hebebühne, Presse etc.



Für den Innendruck p gilt

$$p = \frac{F_1}{A_1} \quad \text{und} \quad p = \frac{F_2}{A_2}$$

also ist

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

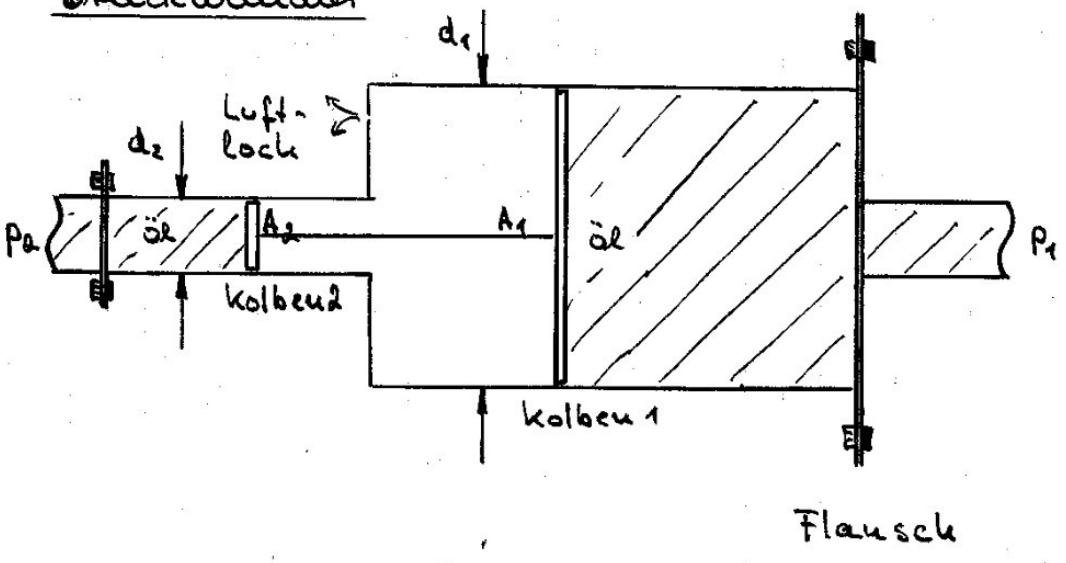
da aber statt der Kolbenflächen A_1 und A_2 die Durchmesser d_1 und d_2 bekannt sind, werden diese eingesetzt. Mit $A = \frac{d^2 \pi}{4}$ ergibt sich:

$$\frac{F_1 \cdot 4}{d_1^2 \pi} = \frac{F_2 \cdot 4}{d_2^2 \pi} \quad \text{bzw.}$$

$$F_1 = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \cdot F_2 \qquad F_2 = \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \cdot F_1$$

$$d_1 = d_2 \sqrt{\frac{F_1}{F_2}} \qquad d_2 = d_1 \sqrt{\frac{F_2}{F_1}}$$

Druckwandler



$$p_2 = \frac{F}{A_2} \qquad p_1 = \frac{F}{A_1}$$

F = Kolbenkraft, sie ist für beide Kolben gleich!

$$F = p_2 \cdot A_2 \qquad F = p_1 \cdot A_1$$

mit $A = \frac{d^2 \pi}{4}$ folgt unter Gleichsetzen der Kräfte

$$\frac{p_2 \cdot d_2^2 \cdot \pi}{4} = \frac{p_1 \cdot d_1^2 \cdot \pi}{4}$$

$$p_2 \cdot d_2^2 = p_1 \cdot d_1^2$$

$$p_2 = p_1 \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2 \qquad d_2 = d_1 \sqrt{\frac{p_1}{p_2}}$$

$d_1 > d_2$

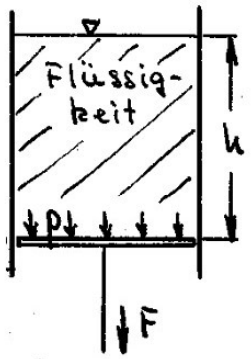
$p_2 > p_1$

$$p_1 = p_2 \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \qquad d_1 = d_2 \sqrt{\frac{p_2}{p_1}}$$

Hierbei können alle Maßeinheiten für p und d verwendet werden.

Hydrostatischer Druck

In einem Zylinder mit Bodenkolben befindet sich eine Flüssigkeit. Wie groß ist der Druck auf den Kolben?



$F = G$ = Gewicht der Flüssigkeit

① $G = \gamma \cdot V$

② $p = \frac{F}{A} = \frac{G}{A}$ } A = Kolbenfläche

aus ① und ② folgt

③ $p = \frac{\gamma \cdot V}{A}$; ④ $V = A \cdot h$

aus ③ und ④ folgt

⑤ $p = \frac{\gamma \cdot A \cdot h}{A} = \gamma \cdot h$

$$\boxed{p = \gamma \cdot h}$$

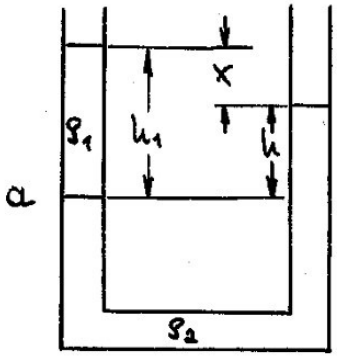
Der hydrostatische Druck (Gewichtsdruck) ist also unabhängig von der Fläche und somit von der Behälterform.

Umgeformt gilt:

$$\boxed{\gamma = \frac{p}{h}} \quad \text{und} \quad \boxed{h = \frac{p}{\gamma}}$$

Gleichgewicht in U-Röhren

(Kommunizierende Röhren)



Ein U-Rohr wird mit einer Flüssigkeit gefüllt. Gießt man nun in die eine der beiden Öffnungen eine mit der anderen Flüssigkeit nicht mischbare Flüssigkeit, und haben beide Flüssigkeiten unterschiedliche Dichten ρ_1 und ρ_2 so stellt sich der gezeichnete Flüssigkeitsspiegel ein. ρ_1 ist kleiner als ρ_2.

Beispiel: $\rho_1 \triangleq$ Öl $\quad \rho_2 \triangleq$ Wasser

Gesucht sind die Abmessungen h, h_1 und x. Ist eine der Abmessungen gegeben, können die anderen errechnet werden.

Vergleicht man die hydrostatischen Drücke in der Höhe der Berührlinie a (niedrigste Flüssigkeitsgrenzschicht) auf beiden Rohrseiten, so gilt:

links: $\quad p = \rho_1 \cdot g \cdot h_1$

rechts: $\quad p = \rho_2 \cdot g \cdot h$

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \gamma \cdot h \\ \gamma = \rho \cdot g \\ p = \rho \cdot g \cdot h \end{array} \right.$$

Drück-(bzw. Kräfte-) Gleichgewicht:

$$\rho_1 \cdot g \cdot h_1 = \rho_2 \cdot g \cdot h$$

① $\quad \rho_1 \cdot h_1 = \rho_2 \cdot h$, außerdem gilt

① $\quad h_1 = h + x$

Je nachdem, was gegeben, bzw. gesucht ist, muß Gleichung ① mit ② kombiniert und nach der Unbekannten aufgelöst werden.

1. Beispiel:

geg.: ρ_1 , ρ_2 , h

ges.: x, h_1

$$\rho_1 (h + x) = \rho_2 \cdot h \qquad h (\rho_2 - \rho_1) = \rho_1 \cdot x$$

$$\rho_1 h + \rho_1 x = \rho_2 \cdot h \qquad x = \frac{h(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1}$$

$$\rho_2 \cdot h - \rho_1 \cdot h = \rho_1 \cdot x \qquad \text{und} \quad h_1 = h + x$$

2. Beispiel:

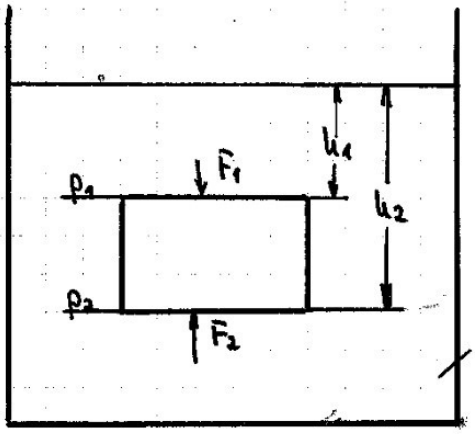
geg.: ρ_2 , h_1 , x

ges.: ρ_1

$$\rho_1 \cdot h_1 = \rho_2 (h_1 - x)$$

$$\rho_1 = \frac{\rho_2 (h_1 - x)}{h_1}$$

Auftrieb



$h_2 - h_1 = \Delta h$

Würfelvolumen $V_K = A \cdot \Delta h$

$p_1 = \gamma_{Fe} \cdot h_1$ $\qquad p_1 = \frac{F_1}{A}$ $\qquad F_1 = A \cdot p_1$

$p_2 = \gamma_{Fe} \cdot h_2$ $\qquad p_2 = \frac{F_2}{A}$ $\qquad F_2 = A \cdot p_2$

$F_1 = A \cdot \gamma_{Fe} \cdot h_1$ $\qquad F_2 = A \cdot \gamma_{Fe} \cdot h_2$

Resultierende Kraft: $\Delta F = F_2 - F_1$

$\Delta F = A \cdot \gamma_{Fe} \cdot h_2 - A \cdot \gamma_{Fe} \cdot h_1$

$\Delta F = \gamma_{Fe} \cdot A \cdot \Delta h$

$\Delta F = \gamma_{Fe} \cdot V_K$ $\qquad \Delta F \equiv F_a$

$$\boxed{F_a^* = \gamma_{Fe} \cdot V_K}$$

* F_a

Diese, von Archimedes einst errechnete Formel kann in einem Satz formuliert werden:

Ein in eine Flüssigkeit tauchender Körper verliert scheinbar soviel von seinem Gewicht, wie die von ihm verdrängte Flüssigkeitsmenge wiegt.

Dichtebestimmung von Körpern

Wägt man einen Körper über und unter Wasser, so kann man dadurch die Körperdichte ermitteln.

G = Gewicht des Körpers in der Luft bzw. über Wasser

G_{H_2O} = Gewicht des Körpers unter Wasser

$\Delta G = G - G_{H_2O}$ = Differenz beider Gewichte

γ_{Fe} = spez. Gewicht der Flüssigkeit, hier H_2O

γ_K = spez. Gewicht des Körpers

F_a = Auftrieb

$$F_a = \Delta G$$

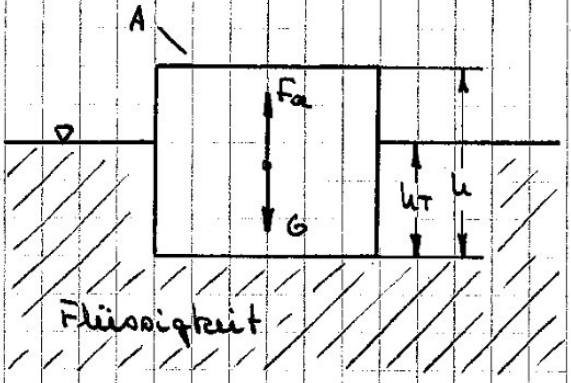
$$\Delta G = \gamma_{Fe} \cdot V_K \qquad V_K = \frac{\Delta G}{\gamma_{Fe}}$$

$$\gamma_K = \frac{G}{V_K}$$

$$\boxed{\gamma_K = \gamma_{Fe} \frac{G}{\Delta G}}$$

Schwimmen

Ein Körper schwimmt, wenn er teilweise in einer Flüssigkeit eintaucht, und sein Auftrieb gleich dem Gewicht ist.



h = Höhe des Körpers [m]
h_T = Tauchhöhe [m]
Fa = Auftrieb [N]
G = Gewicht [N]
V_K = Körpervolumen [m^3]
V_K^* = " in der Flüssigk. [m^3]
A = Fläche des Körpers [m^2]

$$F_a = G \qquad 1)$$

gesucht ist die Tauchhöhe h_T.

$$F_a = \gamma_{Fe} \cdot V_K^* \qquad 2)$$

$$G = \gamma_K \cdot V_K \qquad 3)$$

1), 2), 3): $\gamma_{Fe} \cdot V_K^* = \gamma_K \cdot V_K$ 4)

$V_K^* = A \cdot h_T$ und $V_K = A \cdot h$ 5), 6)

4), 5), 6): $\gamma_{Fe} \cdot A \cdot h_T = \gamma_K \cdot A \cdot h$ 7)

$$h_T = \frac{\gamma_K}{\gamma_{Fe}} \cdot h$$

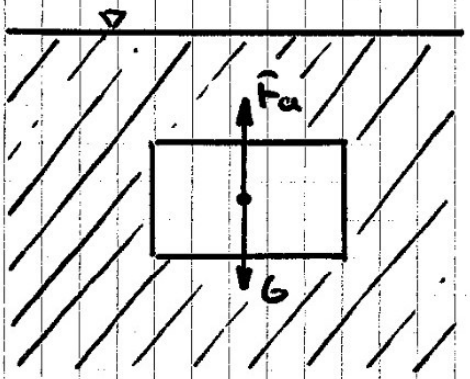
$$h = \frac{\gamma_{Fe}}{\gamma_K} \cdot h_T$$

$$\gamma_{Fe} = \frac{h}{h_T} \cdot \gamma_K$$

$$\gamma_K = \frac{h_T}{h} \cdot \gamma_{Fe}$$

Schweben

Ein Körper schwebt, wenn er vollständig in eine Flüssigkeit eintaucht, und sein Auftrieb gleich dem Körpergewicht ist.



$$F_a = G \qquad 1)$$

setzt man in 1) die folgenden Gleichungen 2) und 3) ein, so ergibt sich:

$$F_a = \gamma_{Fe} \cdot V_K \qquad 2)$$

$$G = \gamma_K \cdot V_K \qquad 3)$$

$$\gamma_{Fe} \cdot \cancel{V_K} = \gamma_K \cdot \cancel{V_K}$$

$$\boxed{\gamma_{Fe} = \gamma_K}$$

Diese Bedingung ist sehr schwer zu erreichen, da meist einer der beiden γ größer ist als der andere.

Steigen

Ist ein Körper vollständig in eine Flüssigkeit eingetaucht, aber der Auftrieb größer als das Körpergewicht, so steigt der Körper nach oben und schwimmt an der Oberfläche.

$$F_a > G \qquad 1)$$

$$F_a = \gamma_{Fe} \cdot V_K \qquad 2)$$

$$G = \gamma_K \cdot V_K \qquad 3)$$

aus 1) bis 3) folgt:

$$\gamma_{Fe} \cdot V_K > \gamma_K \cdot V_K$$

$$\boxed{\gamma_{Fe} > \gamma_K}$$

Sinken

Ist der Auftrieb kleiner als das Körpergewicht, sinkt der Körper und bleibt am Boden liegen.

$$F_a < G \qquad 1)$$

$$F_a = \gamma_{Fe} \cdot V_K \qquad 2) \qquad G = \gamma_K \cdot V_K \qquad 3)$$

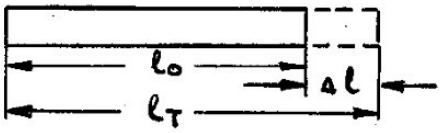
aus 1) bis 3) folgt:

$$\gamma_{Fe} \cdot V_K < \gamma_K \cdot V_K$$

$$\boxed{\gamma_{Fe} < \gamma_K}$$

Thema 7 Wärmeausdehnung

lineare Ausdehnung



$$l_T = l_0 + \Delta l$$

Durch Versuche wurde gefunden:

$$\Delta l = l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

$$\Delta T = T_e - T_a$$

Δl = Längenänderung [m, cm, etc.]
l_0 = Länge bei der Temp. T_a ["]
α = Längenausdehnungszahl $\left[\frac{1}{°C}\right]$
T_a = Temperatur am Anfang $\triangleq l_0$.
T_e = " " Ende $\triangleq l_T$

$$l_T = l_0 + l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

l_T = Länge bei der Temp. T_e [m, cm, etc.]

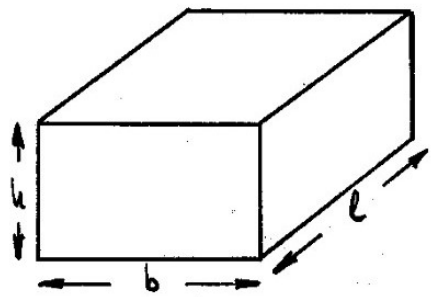
$$l_T = l_0 (1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

Umgeformt gilt:

$$l_0 = \frac{\Delta l}{\alpha \cdot \Delta T} \qquad l_0 = \frac{l_T}{1 + \alpha \cdot \Delta T} \qquad l_0 \approx l_T - l_T \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

$$\Delta T = \frac{\Delta l}{l_0 \cdot \alpha} \qquad T_e = \frac{\Delta l}{l_0 \cdot \alpha} + T_a \qquad T_a = T_e - \frac{\Delta l}{l_0 \cdot \alpha}$$

volumetrische Ausdehnung



$$V_0 = b_0 \cdot l_0 \cdot h_0$$

$$b_T = b_0 (1 + \alpha \Delta T)$$
$$l_T = l_0 (1 + \alpha \Delta T)$$
$$h_T = h_0 (1 + \alpha \Delta T)$$

} Längenausdehnung

$$V_T = b_T \cdot l_T \cdot h_T$$

setzt man nun b_T, l_T und h_T ein, folgt:

$$V_T = b_0 (1 + \alpha \Delta T) \cdot l_0 (1 + \alpha \Delta T) \cdot h_0 (1 + \alpha \Delta T)$$

$$V_T = \underbrace{b_0 \cdot l_0 \cdot h_0}_{V_0} (1 + \alpha \Delta T)^3$$

$$V_T = V_0 (1 + \alpha \Delta T)^3$$

$$\underline{\underline{V_T = V_0 (1 + 3\alpha \Delta T + 3\alpha^2 \Delta T^2 + \alpha^3 \Delta T^3)}}$$

Dies ist zwar eine exakt abgeleitete Gleichung, doch hat sie den Nachteil, daß sie umfangreich ist. An einem praktischen Beispiel soll gezeigt werden, wie man sie vereinfachen kann.

$V_0 = 1\ m^3$ Gußeisen

$\alpha = 0{,}000\,010\,4\ \frac{1}{grd}$

$\Delta T = 100\ °C$

Die einzelnen Ausdrücke in der Klammer ergeben dann:

$3 \alpha \Delta T = 3 \cdot 0{,}000\,010\,4 \cdot 100 = 0{,}003\,12$

$3 \alpha^2 \Delta T^2 = 3 \cdot 0{,}000\,000\,000\,108\,16 \cdot 10\,000 = 0{,}000\,001\,081\,6$

$\underline{\alpha^3 \Delta T^3 = 0{,}000\,000\,000\,000\,001\,124\,864 \cdot 1\,000\,000 = 0{,}000\,000\,001\,125}$

$1 + 3\alpha \Delta T + 3\alpha^2 \Delta T^2 + \alpha^3 \Delta T^3 = 1{,}003\,121\,082\,725$

dagegen ergibt

$1 + 3\alpha \Delta T = 1{,}003\,12$

dies ist für die meisten Fälle genau genug

Also kann man $3\alpha^2 \Delta T^2$ und $\alpha^3 \Delta T^3$ weglassen, da sie nur unwesentlich zum Ergebnis beitragen.

Vereinfacht sieht die Gleichung dann so aus:

$$V_T = V_0 \, (1 + 3\alpha \, \Delta T)$$

ersetzt man:

$$3\alpha = \beta$$

so wird

$$V_T = V_0 \, (1 + \beta \, \Delta T)$$

β = Raumausdehnungszahl $\left[\frac{1}{°C}\right] \equiv \left[\frac{1}{grd}\right]$

α bzw. β sind selbst abhängig von der Temperatur und daher für verschiedene Temperaturbereiche unterschiedlich groß. Die vollständige und exakte Berechnung der Ausdehnung ist kompliziert und muß die Schwingungen der Moleküle untereinander berücksichtigen. Statt auf V_0 muß man sich dann auf die Anzahl der vorhandenen Moleküle bzw. Atome beziehen.
Umgeformt ergeben sich die gleichen Formel wie bei der linearen Ausdehnung, wenn man statt l_0 - V_0 und statt l_T - V_T bzw. Δl - ΔV und statt α - β setzt.

Thema 8 Gasgesetze

Bei Gasen ist β relativ groß ($\approx \frac{1}{300}$), so daß sich ein Volumen bei Temperaturänderung relativ stark ausdehnt. Für großes β stimmt die Formel

$$V_T = V_0 (1 + \beta \Delta T)$$

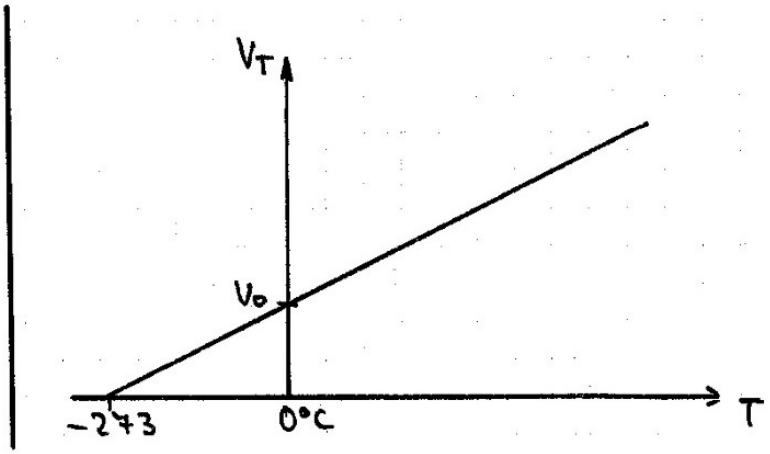
nicht mehr in der Form wie bei Festkörpern. V_0 kann hier nicht beliebig gewählt werden, sondern muß mit β auf eine bestimmte Temperatur bezogen werden.

Allgemein wählt man 0° C, dann gilt mit

$$\Delta T = T_e - T_a \qquad \text{für } T_a = 0°C$$

$$\Delta T = T$$

und β ist für alle Gase $\frac{1}{273}\left[\frac{1}{°C}\right]$.



Setzt man $\beta = \frac{1}{273}\left[\frac{1}{°C}\right]$ ein wird V_T für $T = -273°C$ gerade 0

$$V_T = V_0 (1 + \beta T)$$

$$V_T = V_0 + V_0 \beta T \qquad V_T = 0$$

$$0 = V_0 + V_0 \beta T$$

$$-V_0 = V_0 \beta T$$

$$-1 = \beta T$$

$$-\frac{1}{\beta} = T \quad \text{oder} \quad T = -\frac{1}{\beta} \qquad \beta = \frac{1}{273}\left[\frac{1}{°C}\right]$$

$$\underline{\underline{T = -273°C}}$$

Dies ist der absolute Nullpunkt.

Setzt man den Nullpunkt einer neuen Temperatur genau auf $-273°C = 0°K$ dann erhält man die Kelvin-Skala.

$$-273°C = 0°K$$

$$0°C = 273°K$$

$$100°C = 373°K$$

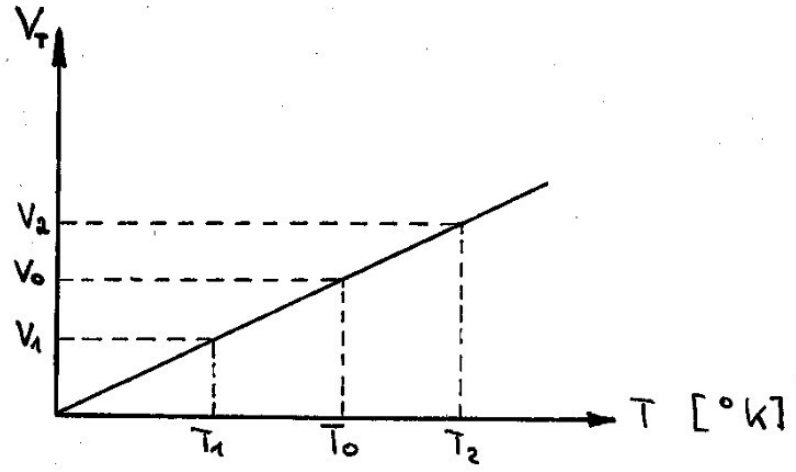
allgemein

$$\boxed{T°K = T°C + 273}$$

$$\boxed{T°C = T°K - 273}$$

Dies hat den Vorteil, daß man nicht mehr mit negativen Temperaturen zu rechnen braucht, außerdem läßt sich dann ein einfaches Gasgesetz aufstellen.

Das V/T - Diagramm für Gase



$T_0 = 0°C = 273°K$

In der Gleichung:

$V_T = V_0 + V_0 \beta T_{0C}$ wird T in °C eingesetzt [T_{0C}].

will man T in °K einsetzen so ergibt sich:

$V_T = V_0 + V_0 \beta (T_{0K} - 273)$

$V_T = V_0 + V_0 \beta T_{0K} - V_0 \beta 273$

da aber $\beta = 1/273$ ist, folgt

$V_T = \cancel{V_0} + V_0 \frac{T}{273} - \cancel{V_0} \cdot 1$ $\qquad T = T_{0K}$

$V_T = \frac{V_0 \cdot T}{273}$

Beim Volumen V_0 beträgt die Temp. T_0 gerade 273°K d.h. $T_0 = 273$, dies kann eingesetzt werden:

$V_T = \frac{V_0 \cdot T}{T_0}$ bzw. $\frac{V_T}{T} = \frac{V_0}{T_0}$

Für ein Volumen V_2 mit der entsprechenden Temperatur T_2 gilt dann

$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_0}{T_0}$$

dasgleiche gilt auch für V_1 mit T_1

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_0}{T_0}$$

somit gilt:

$$\boxed{\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_1}}$$

Durch Versuche fand man die Druck/Volumenbeziehung:

$$\boxed{V_1 \cdot p_1 = V_2 \cdot p_2}$$

Faßt man beide Gleichungen zusammen, so ergibt sich:

$$\boxed{\frac{V_1 \cdot p_1}{T_1} = \frac{V_2 \cdot p_2}{T_2}}$$

Allgemeine Gasgleichung nach Boyle-Mariotte und Gay-Lussac

V_1, p_1 = Volumen und Druck bei der Temperatur T_1

V_2, p_2 = " " " " " " T_2

$[V_1, V_2]$ = m^3, dm^3, l, cm^3 etc.

$[p_1, p_2]$ = at, Kp/cm^2, bar, N/m^2, mm Hg, Torr etc. keine atü

$[T_1, T_2]$ = °K

Molvolumen

Darunter versteht man das Volumen eines Gases bei 0°C und 1 atm und der Masse seines Molgewichts.

32 g Sauerstoff = 1 Mol (Atomgewicht = 16) O_2
28 g Stickstoff = 1 Mol (" = 14) N_2
2 g Wasserstoff = 1 Mol (" = 1) H_2

Das Molvolumen aller Gase beträgt 22,4 l

Für die Zahl der Mole verwendet man das Zeichen n

Für $n = 3$ ist bei O_2 $V = 3 \cdot 22.4$ l

$$\text{Zahl der Mol } n = \frac{\text{Masse } m}{\text{Molgewicht } M}$$

$$\boxed{n = \frac{m}{M}}$$

m = Gasmasse [g]
M = Molgewicht $\left[\frac{g}{mol}\right]$

Setzt man für

$V_0 = n \cdot 22.4$
$T_0 = 273°K$
$p_0 = 1$ atm

in die allgemeine Gasgleichung

$$\frac{p \cdot V}{T} = \frac{1 \cdot n \cdot 22.4}{273} = n \cdot 0{,}082$$

$p \cdot V = n \cdot 0{,}082 \cdot T$

für 0.082 setzt man R $\left[\frac{l \cdot atm}{Mol \cdot °K} \right]$

$$\boxed{p \cdot V = n \cdot R \cdot T}$$

Gasdichte ϱ

$$n = \frac{m}{M}$$

$$p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T$$

$$\frac{m}{V} = \frac{p \cdot M}{R \cdot T} \qquad \frac{m}{V} = \varrho$$

$$\boxed{\varrho = \frac{p \cdot M}{R \cdot T}}$$

ϱ = Gasdichte $\left[\frac{g}{l} \right]$
p = Gasdruck [atm]
M = Molgewicht $\left[\frac{g}{mol} \right]$
T = Gastemperatur [°k]
R = 0.082 $\frac{l \cdot atm}{mol \cdot °K}$

Umgeformt gilt:

$$\boxed{p = \frac{n \cdot R \cdot T}{V}} \qquad \boxed{V = \frac{n \cdot R \cdot T}{p}} \qquad \boxed{n = \frac{p \cdot V}{R \cdot T}} \qquad \boxed{T = \frac{p \cdot V}{n \cdot R}}$$

$$\boxed{p = \frac{\varrho \cdot R \cdot T}{M}} \qquad \boxed{M = \frac{\varrho \cdot R \cdot T}{p}} \qquad \boxed{T = \frac{p \cdot M}{\varrho \cdot R}}$$

Thema 9 Wärmeübertragung

Die zum Erhitzen bzw. Abkühlen ausgetauschte Wärme beträgt:

$Q = m \cdot c \cdot \Delta T$
$\Delta T = T_e - T_a$

Q = ausgetauschte Wärme [kcal] od. [J]
m = Masse des erwärmten oder gekühlten Körpers
c = spez. Wärme $[\frac{kcal}{kg \cdot grd}]$ od. $[\frac{J}{kg \cdot grd}]$

T_e = Endtemperatur [°C] od. [°K]
T_a = Anfangstemperatur " "

Wird die Masse m erwärmt, ist $T_e > T_a$, d.h. Q ist positiv.
Wird die Masse m abgekühlt, ist $T_e < T_a$, d.h. Q ist negativ.
Daraus folgt:
Positive Wärme bedeutet, es fließt Wärme zum Körper
Negative Wärme bedeutet, es fließt Wärme vom Körper

Die Wärmeeinheit Kcal

Erwärmt man Wasser von 14.5°C auf 15.5°C, so benötigt man pro Kg Wasser 1 Kcal Wärme. Im allgemeinen benötigt man pro °C und pro Kg Wasser etwa 1 Kcal Wärme für Wasser, so daß für Wasser gilt

$$c_{H_2O} = 1 \frac{kcal}{kg \cdot grd}$$

Für die meisten anderen Körper ist $c < 1 \frac{kcal}{kg \cdot grd}$

Statt mit Kcal wird mehr und mehr mit J (Joule) gerechnet.

$\underline{1\ \text{Kcal} = 4190\ \text{J}}$ $\qquad$ $\underline{1\ \text{J} = 0{,}000239\ \text{Kcal}}$

$\underline{1\ \text{cal} = 4{,}19\ \text{J}}$

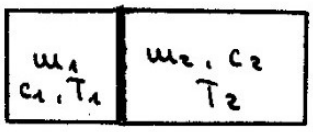
Umgeformt gilt:

$$m = \frac{Q}{c \cdot \Delta T} \qquad c = \frac{Q}{m \cdot \Delta T} \qquad \Delta T = \frac{Q}{m \cdot c}$$

$$T_e = \frac{Q}{m \cdot c} + T_a \qquad T_a = T_e - \frac{Q}{m \cdot c}$$

Mischungstemperatur T_m

Verbindet (mischt) man 2 Körper mit unterschiedlichen Temperaturen, so findet ein Temperaturausgleich statt, und es stellt sich eine Mischungstemperatur ein, die für beide Körper gleich groß ist.



Bedingung:
Nach außen wird keine Wärme ausgetauscht, d.h. für beide Massen gilt

1) $\qquad Q_1 + Q_2 = 0$

die Summe aller Wärmeübertragungen ist Null, d.h. die Gesamtwärme bleibt konstant.

2) $Q_1 = m_1 \cdot c_1 \cdot \Delta T_1$

3) $Q_2 = m_2 \cdot c_2 \cdot \Delta T_2$

aus 1), 2) und 3) folgt

4) $m_1 \cdot c_1 \cdot \Delta T_1 + m_2 \cdot c_2 \cdot \Delta T_2 = 0$

5) $\Delta T_1 = T_m - T_1$ 6) $\Delta T_2 = T_m - T_2$

T_m ist die Mischungs- bzw. Endtemperatur beider Körper

aus 4), 5) und 6) folgt

7) $m_1 \cdot c_1 \cdot (T_m - T_1) + m_2 \cdot c_2 \cdot (T_m - T_2) = 0$

8) $m_1 \cdot c_1 \cdot T_m - m_1 \cdot c_1 \cdot T_1 + m_2 \cdot c_2 \cdot T_m - m_2 \cdot c_2 \cdot T_2 = 0$

nach T_m aufgelöst ergibt sich:

9) $m_1 \cdot c_1 \cdot T_m + m_2 \cdot c_2 \cdot T_m = m_1 \cdot c_1 \cdot T_1 + m_2 \cdot c_2 \cdot T_2$

$$T_m = \frac{m_1 \cdot c_1 \cdot T_1 + m_2 \cdot c_2 \cdot T_2}{m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2}$$

für mehrere Körper $m_1, m_2, m_3 \cdots$ gilt

$$T_m = \frac{m_1 \cdot c_1 \cdot T_1 + m_2 \cdot c_2 \cdot T_2 + m_3 \cdot c_3 \cdot T_3 + \cdots m_n \cdot c_n \cdot T_n}{m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2 + m_3 \cdot c_3 + \cdots m_n \cdot c_n}$$

umgeformt gilt:

$$m_1 = \frac{m_2 \cdot c_2 \, (T_2 - T_m)}{c_1 \, (T_m - T_1)} \qquad c_1 = \frac{m_2 \cdot c_2 \, (T_2 - T_m)}{m_1 \, (T_m - T_1)}$$

$$T_1 = T_m + \frac{m_2 \cdot c_2}{m_1 \cdot c_1} \, (T_m - T_2)$$

Schmelzen und Verdampfen

Schmelzwärme

$$Q = m \cdot q$$

q = spezifische Schmelzwärme $\left[\frac{kcal}{kg}\right]$

Zum Schmelzen muß die Wärme zugeführt werden:
Q ist positiv ($Q > 0$)

Beim Erstarren muß die Wärme abgeführt werden:
Q ist negativ ($Q < 0$)

Verdampfungswärme

$$Q = m \cdot r$$

r = spez. Verdampfungswärme $\left[\frac{kcal}{kg}\right]$

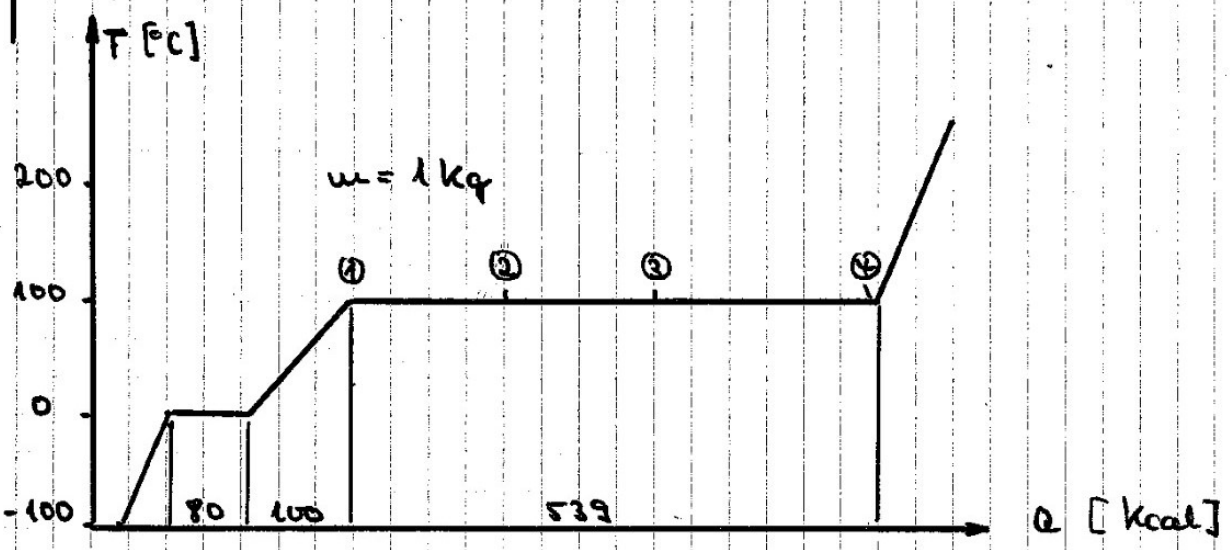
Beim Sieden oder Verdampfen muß die Wärme zugeführt werden: Q ist positiv ($Q > 0$)
Beim Kondensieren muß die Wärme abgeführt werden:
Q ist negativ ($Q < 0$)

Kühlung durch Verdunsten (Kühltürme, Erfrischungstücher)
Das Verdampfen erfolgt unterhalb der Siedetemperatur und findet nur an der Oberfläche statt, während das Sieden in der ganzen Flüssigkeit bzw. am Boden stattfindet. Für beide Vorgänge gilt

$$Q = m \cdot r$$

Während des Schmelzens und Verdampfens wird ein Stoff nicht erwärmt. Der Vorgang geschieht bei konst. Temperatur.

Q / T Diagramm von Wasser



①	100 %	Wasser	bei	100°C	0%	Dampf	bei	100°C
②	72 %	"	"	"	28%	"	"	"
③	43 %	"	"	"	57%	"	"	"
④	0 %	"	"	"	100%	"	"	"

Die spezifische Wärme von Wasser ist 1 $\frac{kcal}{kg \cdot °C}$

" " " von [redacted] Dampf ist 0,45 $\frac{kcal}{kg \cdot °C}$

" " " von Eis ist 0.48 $\frac{kcal}{kg \cdot °C}$

" spez. Verdampfungswärme von Wasser ist 539 kcal/kg

" " Schmelzwärme von Eis ist 80 kcal/kg

Thema 10 Wärmeleitung und -übergang

Wärmestrom $\dot{Q}$

Def.: $\boxed{\dot{Q} = \frac{Q}{t}}$

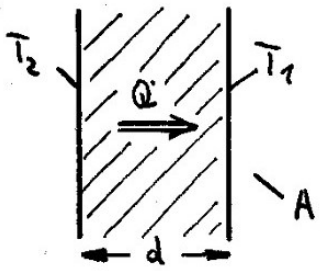
$\dot{Q}$ = Wärmestrom $\left[\frac{kcal}{h}\right]$ od. $\left[\frac{J}{s} = W\right]$

Q = Wärmemenge [kcal] od. [J]

t = Zeit [h] od. [s]

Wärmestrom am festen Körper:

Hat ein Körper unterschiedliche Wandtemperaturen, so entsteht ein Wärmestrom, der von der wärmeren zur kälteren Wand fließt.



$T_2 > T_1$

$T_2 - T_1 = \Delta T$

Durch Versuche fand man die folgenden Formeln:
(sie kann auch abgeleitet werden)

$$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R_w}$$

$$R_w = \frac{d}{\lambda \cdot A}$$

daraus folgt:

$$\boxed{\dot{Q} = \frac{A \cdot \lambda \cdot \Delta T}{d}}$$

R_w = Wärmewiderstand des Körpers $\left[\frac{°C \cdot h}{kcal}\right]$

d = Abstand der beiden Wände [m]

A = Wandfläche [m²]

λ = Wärmeleitfähigkeit des Körpers $\left[\frac{kcal}{m \cdot h \cdot grd}\right]$

ΔT = Temperaturdifferenz [°C od. °K]

umgeformt ergibt sich:

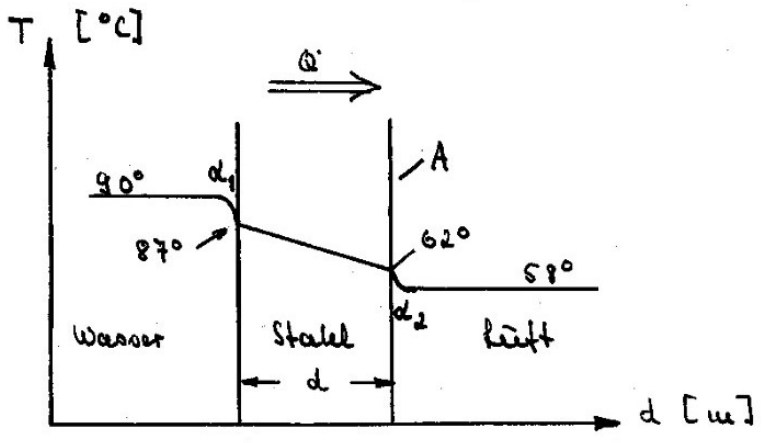
$$A = \frac{\dot{Q} \cdot d}{\lambda \cdot \Delta T} \qquad \lambda = \frac{\dot{Q} \cdot d}{A \cdot \Delta T} \qquad \Delta T = \frac{\dot{Q} \cdot d}{A \cdot \lambda} \qquad d = \frac{A \cdot \lambda \cdot \Delta T}{\dot{Q}}$$

$$T_2 = \frac{\dot{Q} \cdot d}{A \cdot \lambda} + T_1 \qquad T_1 = T_2 - \frac{\dot{Q} \cdot d}{A \cdot \lambda}$$

Wärmeübergang an der Wand

Grenzt eine Wand an eine Flüssigkeit oder ein Gas, so entsteht in unmittelbarer Nähe der Wand ein Temperaturgefälle. Daher haben Wand und Flüssigkeit, bzw. Wand und Gas nicht dieselbe Temperatur.

Temperaturprofil



Der Wärmeübergang an einer Wand berechnet sich nach der Formel

$$\dot{Q} = \alpha \cdot A \cdot \Delta T$$
$$\Delta T = T_M - T_W \quad *$$
$$T_M > T_W$$

α = Wärmeübergangszahl $\left[\frac{kcal}{m^2 \cdot h \cdot grd}\right]$

A = Übertragungs- (Wand-) Fläche $[m^2]$

ΔT = Temperaturdifferenz an der Wand $[°C]$

T_M = Medium- (Flüssigkeit-, oder Gas-) Temperatur $[°C]$

T_W = Wandtemperatur $[°C]$

umgestellt gilt:

$$\alpha = \frac{\dot{Q}}{A \cdot \Delta T}$$

$$A = \frac{\dot{Q}}{\alpha \cdot \Delta T}$$

$$\Delta T = \frac{\dot{Q}}{\alpha \cdot A}$$

$$T_M = \frac{\dot{Q}}{\alpha \cdot A} + T_W \quad *$$
$$T_M > T_W$$

$$T_W = T_M - \frac{\dot{Q}}{\alpha \cdot A} \quad *$$
$$T_M > T_W$$

* die Formel gelten, wenn $\dot{Q}$ von T_M nach T_W fließt, d.h. $T_M > T_W$. Fließt $\dot{Q}$ von T_W nach T_M, d.h. ist $T_M < T_W$, wird einfach T_M mit T_W vertauscht. Am deutlichsten erkennt man die Fließrichtung im Temperaturprofil.

Wärmedurchgang

Wärmeleitung und Wärmeübergang ergeben den Wärmedurchgang. Um nun den Wärmestrom beim Wärmedurchgang berechnen zu können, geht man, ähnlich wie in der Elektrotechnik, davon aus, daß der Wärmestrom mehrere Wärmewiderstände

nacheinander durchlaufen muß. Daher kann man alle einzelnen Wärmewiderstände addieren.

Wärmewiderstand beim Wärmeübergang

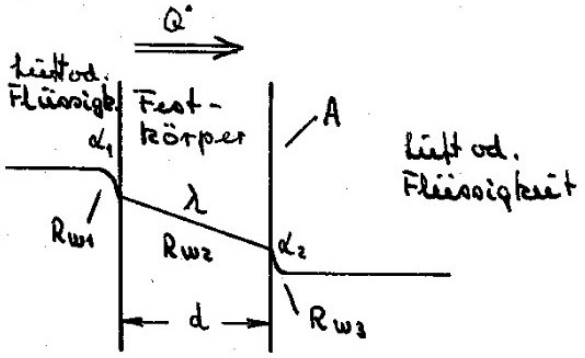
aus $\dot{Q} = \alpha \cdot A \cdot \Delta T$ und

$\dot{Q} = \frac{\Delta T}{R_w}$ folgt

$\alpha \cdot A = \frac{1}{R_w}$ bzw. $\underline{\underline{R_w = \frac{1}{\alpha \cdot A}}}$ $\left[\frac{°C \cdot h}{kcal}\right]$

Wärmewiderstand bei der Wärmeleitung

$$\underline{\underline{R_w = \frac{d}{\lambda \cdot A}}} \quad \left[\frac{°C \cdot h}{kcal}\right]$$



$R_{w1} = \frac{1}{\alpha_1 \cdot A}$ $\quad R_{w2} = \frac{d}{\lambda \cdot A}$ $\quad R_{w3} = \frac{1}{\alpha_2 \cdot A}$

$$\sum_1^3 R_w = \frac{1}{\alpha_1 \cdot A} + \frac{d}{\lambda \cdot A} + \frac{1}{\alpha_2 \cdot A} = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}\right)$$

Für den Wärmedurchgang gilt:

$$\dot{Q} = \frac{\Sigma \Delta T}{\Sigma R_w}$$

$\Sigma \Delta T$ = Summe aller Temperatur-differenzen

$\Sigma \Delta T = \Delta T_{ges}$

setzt man ΣR_w ein, folgt:

$$\dot{Q} = \frac{A \cdot \Delta T_{ges}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}$$

$\dot{Q}$ = Wärmestrom $\left[\frac{kcal}{h}\right]$

A = Wandfläche $[m^2]$

ΔT_{ges} = größte Temperaturdifferenz (von Medium zu Medium) $[°C]$

α = Wärmeübergangszahl des Mediums $\left[\frac{kcal}{m^2 \cdot h \cdot °C}\right]$

d = Wanddicke $[m]$

λ = Wärmeleitfähigkeit der Wand $\left[\frac{kcal}{m \cdot h \cdot °C}\right]$

k = Wärmedurchgangszahl $\left[\frac{kcal}{m^2 \cdot h \cdot °C}\right]$

Wärmedurchgangszahl k:

Def.:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}$$

somit wird $\dot{Q}$:

$$\dot{Q} = k \cdot A \cdot \Delta T_{ges}$$

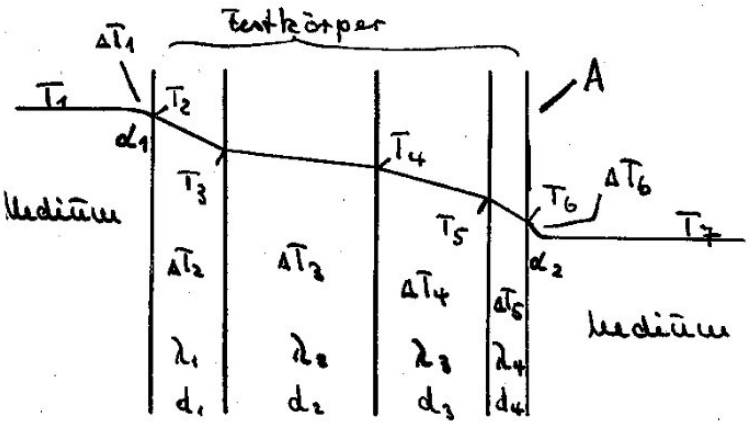
Umgeformt gilt:

$$A = \frac{\dot{Q}}{k \cdot \Delta T_{ges}} \qquad k = \frac{\dot{Q}}{A \cdot \Delta T_{ges}} \qquad \Delta T_{ges} = \frac{\dot{Q}}{k \cdot A}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\frac{A \cdot \Delta T_{ges}}{\dot{Q}} - \frac{d}{\lambda} - \frac{1}{\alpha_2}} \qquad \alpha_2 = \frac{1}{\frac{A \cdot \Delta T_{ges}}{\dot{Q}} - \frac{d}{\lambda} - \frac{1}{\alpha_1}}$$

$$d = \left(\frac{A \cdot \Delta T}{\dot{Q}} - \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2}\right) \cdot \lambda \qquad \lambda = \frac{d}{\frac{A \cdot \Delta T}{\dot{Q}} - \frac{1}{\alpha_1} - \frac{1}{\alpha_2}}$$

Besteht eine Wand aus mehreren Teilen, so gilt:



$$\Delta T_{ges} = T_1 - T_7$$

$$\Delta T_1 = T_1 - T_2 = \frac{\dot{Q}}{\alpha_1 \cdot A}$$

$$\Delta T_2 = T_2 - T_3 = \frac{\dot{Q} \cdot d_1}{\lambda_1 \cdot A}$$

$$\vdots$$

$$\Delta T_5 = T_5 - T_6 = \frac{d_4 \cdot \dot{Q}}{\lambda_4 \cdot A}$$

$$\Delta T_6 = T_6 - T_7 = \frac{\dot{Q}}{\alpha_2 \cdot A}$$

$$\Sigma R_W = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{d_3}{\lambda_3} + \frac{d_4}{\lambda_4} + \frac{1}{\alpha_2}\right) = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{k}$$

$$\dot{Q} = \frac{A \cdot \Delta T_{ges}}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{d_3}{\lambda_3} + \frac{d_4}{\lambda_4} + \frac{1}{\alpha_2}}$$

Berechnung der einzelnen Temperaturen:

$\dot{Q}$ berechnen aus $\dot{Q} = k \cdot A \cdot \Delta T_{ges}$

aus $\dot{Q}$ T_2 berechnen $T_2 = T_1 - \frac{\dot{Q}}{\alpha_1 \cdot A}$ $\left(\Delta T_1 = \frac{\dot{Q}}{\alpha_1 \cdot A}\right)$

nacheinander ΔT_2 bis ΔT_6 berechnen (s.o.)

und daraus die Temperaturen bis T_6 bzw. T_7 berechnen.

z.B. ist

$$T_4 = T_1 + \Delta T_1 + \Delta T_2 + \Delta T_3$$

Oder, wenn z.B. T_4 gesucht ist, die Wärmeleitfähigkeit mit α_1 von T_1 bis T_4 berechnen. Mit $\dot{Q}$ ergibt sich:

$$\dot{Q} = \frac{A \cdot (T_1 - T_4)}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2}} \qquad T_1 - T_4 = \frac{\dot{Q}\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2}\right)}{A}$$

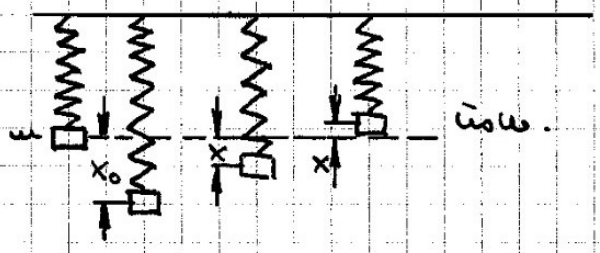
$$\text{bzw.} \quad T_4 = T_1 - \frac{\dot{Q}}{k \cdot A}$$

Thema 11 Schwingungen

Hängt man an eine Feder mit der Federkonstante D eine Masse m und zieht man diese mit die Länge x_0, gerechnet von der Ruhelage, nach unten, so schnellt die Masse nach **oben** und schwingt auf und ab, sobald man sie losläßt. In regelmäßigen Zeitabständen befindet sich die Masse wieder dort, wo sie startete.

Wie groß ist nun die Zeit dafür? Wieviel Schwingungen macht die Masse pro Sekunde? Nach welcher mathematischen Funktion erfolgt die Auf- und Abbewegung?

Es gibt dazu mehrere, meist schwierige Ableitungen. Die, zu der die geringsten Vorkenntnisse benötigt werden, und gleichzeitig wenig Umfang hat, soll hier gezeigt werden. Vorr.: Energiesatz, Drehbewegungen



Hooke'sches Gesetz:

$F = D \cdot x$

x = Elongation (Auslenkung)

Auftriebsenergie = Federarbeit:

$$E_1 = \frac{D \cdot x_0^2}{2}$$

Endenergie:

$$E_2 = \frac{D \cdot x^2}{2} \quad ; \quad E_3 = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

E_2 = Restfederenergie

E_3 = kin. Energie

Energiegleichung:

$$\frac{D \cdot x_0^2}{2} = \frac{D \cdot x^2}{2} + \frac{m \cdot v^2}{2}$$

nach Kürzen mit 2 und Umstellen von $D \cdot x^2$ ergibt sich

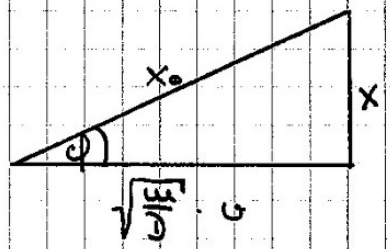
$$m \cdot v^2 = D \cdot x_0^2 - D \cdot x^2$$

$$m \cdot v^2 = D \left(x_0^2 - x^2 \right)$$

$$\frac{m}{D} \cdot v^2 = x_0^2 - x^2 \qquad \left| \sqrt{} \right.$$

$$\sqrt{\frac{m}{D}} \cdot v = \sqrt{x_0^2 - x^2}$$

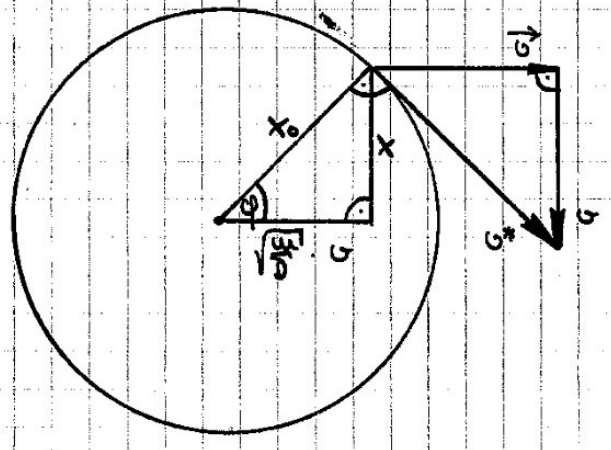
Nach Pythagoras gilt: und:



$$\sin \varphi = \frac{x}{x_0}$$

$$x = x_0 \cdot \sin \varphi \qquad 1)$$

Da sich x ständig ändert, x_0 aber konstant bleibt, ändert sich auch φ. somit bildet die Dreickspitze rechts oben einen Kreis mit dem Radius x_0



Irgendwie bewegt sich also die Dreickspitze kreisförmig. somit hat sie auch eine Geschwindigkeit (Umlaufgeschwindigkeit) v^* haben. Diese kann in eine senkrechte und waagerechte Komponente v und $\vec{v}$ zerlegt werden. Die waagerechte interessiert hier nicht.

Die beiden Dreiecke sind ähnlich, so daß sich aus dem Verhältnis entsprechender Seiten ergibt:

$$\frac{\sqrt{\frac{D}{m}}}{v} = \frac{v^*}{x_0}$$

$$\sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{v^*}{x_0}$$

Da D, m und x_0 konstant sind, muß auch v^* konstant sein, d.h. die Dreieckspitze dreht sich gleichmäßig mit konstanter Drehzahl herum.

f = Drehzahl $\left[\frac{\text{Umdrehung}}{s}\right]$ $\left[\frac{1}{s}\right]$

Für Drehbewegungen gilt:

φ = Drehwinkel [°] $\quad \frac{\varphi}{t} = \omega$ = Winkelgeschwindigkeit $\left[\frac{1}{s}\right]$

Umfangsgeschwindigkeit v^*

$$v^* = r \cdot \omega$$

da hier $r = x_0$ ist, kann v^* eingesetzt werden

$$\sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{x_0 \cdot \omega}{x_0}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$ da $\omega = 2\pi \cdot f$ ist, folgt

$$\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}} \text{ und } \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}}$$

f = Frequenz $\left[\frac{1}{s}\right]$

T = Schwingzeit [s]

Frequenz und Schwingzeit:

$$f = \frac{1}{T} \qquad \text{und} \qquad T = \frac{1}{f}$$

Verlauf der Hin- und Herbewegung (Schwingung):

nach Gl. 1) war

$$x = x_0 \cdot \sin \varphi$$

da $\varphi = \omega \cdot t$ und $\omega = 2\pi f$ ist, gilt

$$x = x_0 \cdot \sin \omega t \qquad \text{und} \qquad x = x_0 \cdot \sin 2\pi f$$

Umgeformt gilt:

$$D = m \cdot \omega^2 \qquad m = \frac{D}{\omega^2} \qquad \omega = 2\pi f \qquad f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$D = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \qquad m = D \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Ist die Federkraft $F = G$ (bekannt), und tritt diese einer Auslenkung x^* hervor, so gilt

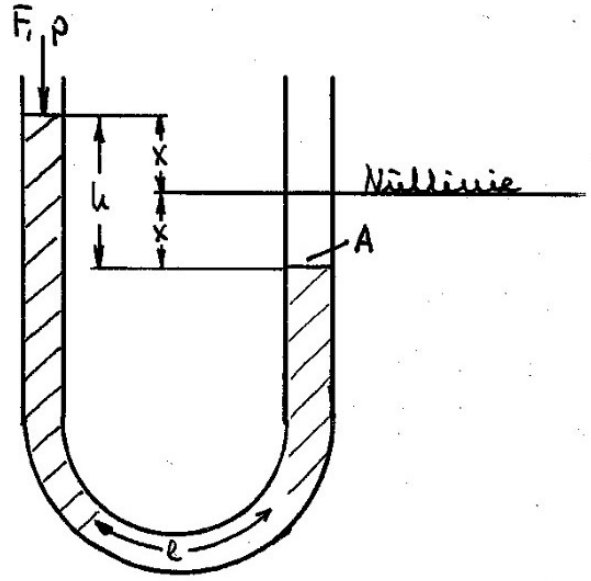
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{x^*}} \qquad x^* = \frac{g}{\omega^2} \qquad \omega = 2\pi f$$

f ist umkehrbar, da pro Umdrehung 1 Schwingung abläuft, stellt f für den Kreis die Drehzahl, für die Schwingung die Frequenz = $\frac{\text{Schwingung}}{s}$ dar. Korrekt hat f die Maßeinheit $\left[\frac{1}{s}\right]$.

Frequenz verschiedener Systeme

Man stellt zunächst eine Formel mit F und x auf, vergleicht diese mit $F = D \cdot x$ und setzt dann, was der Richtgröße D entspricht in die Frequenzformel ein.

Flüssigkeit in einem U - Rohr



x = Elongation [m]

l = Länge der Flüssigkeitssäule [m]

γ = spez. Gewicht der Flüssigkeit $\left[\frac{N}{m^3}\right]$

A = Oberfläche [m^2]

Druck: $p = \gamma \cdot h$ bzw. $p = \frac{F}{A}$

Kraft: $F = \gamma \cdot h \cdot A$

$h = 2x$ eingesetzt ergibt sich:

$F = 2 \cdot \gamma \cdot A \cdot x$

Vergleich: $F = D \cdot x$ also ist

$$\underline{\underline{D = 2 \cdot \gamma \cdot A}}$$

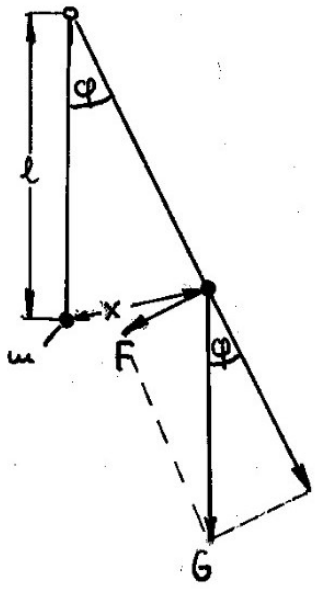
$\frac{D}{m} = \frac{2 \cdot \gamma \cdot A}{m}$ setzt man $m = \varrho \cdot V = \varrho \cdot A \cdot l$ und $\gamma = \varrho \cdot g$ ein, ergibt sich

$$\frac{D}{m} = \frac{2 \cdot \rho \cdot g \cdot A}{\rho \cdot A \cdot l} = \frac{2 \cdot g}{l}$$

dies in die Frequenzformel eingesetzt, ergibt:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2 \cdot g}{l}} \quad \text{und} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{2 \cdot g}}$$

Pendelformel



l = Pendellänge [m]
m = Pendelmasse [kg]
φ = Drehwinkel [°]
x = Elongation [m]
F = rücktreibende Kraft [N]
G = Pendelgewicht [N]

Ist der Winkel φ klein (bis ca. 14°) so gilt, bis auf einen Fehler von ≈ 1 %, die Verhältnisgleichung auf Grund ähnlicher Dreiecke:

$$\frac{x}{l} = \frac{F}{G}$$

damit wird: $F = \frac{G}{l} \cdot x$ bzw. $F = \frac{m \cdot g}{l} \cdot x$

Vergleich mit $F = D \cdot x$

ergibt die Richtgröße D

$D = \frac{w \cdot g}{e}$ und $\frac{D}{w} = \frac{g}{e}$

dies wird in die Frequenzformel eingesetzt:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{e}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

<u>umgeformt gilt</u>:

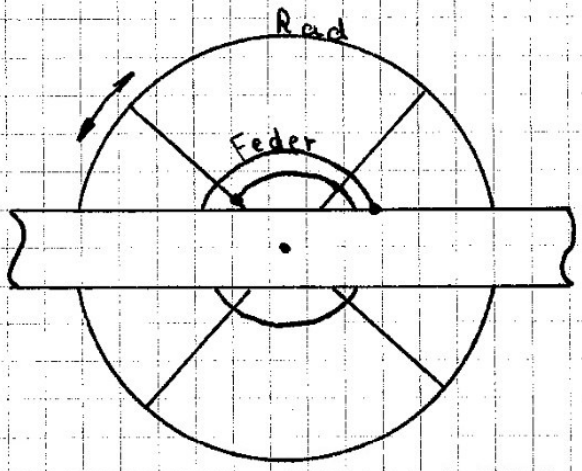
$$g = l \cdot \omega^2 \qquad l = \frac{g}{\omega^2} \qquad \omega = 2\pi f$$

$$g = l \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \qquad l = g \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$$

Uhrenpendel haben, wegen der geforderten Ganggenauigkeit, einen Pendelausschlag von 6° und weniger.

Die exakte Pendelgleichung ist kompliziert, hierbei zeigt sich, daß die Frequenz bei großen Ausschlägen, je größer - je mehr, nicht mehr konstant ist, sondern vom Maß des Ausschlages (Amplitude, Elongation) abhängig ist.

Drehschwingungen



M = Drehmoment [mN]

D^* = Federkonstante [mN]

φ = Drehwinkel [°]

γ = Massenträgheitsmoment [mVs²]

α = Winkelbeschleunigung [$\frac{1}{s^2}$]

Federgesetz: $M = D^* \cdot \varphi$

Dyn. Grundgesetz $M = \gamma \cdot \alpha$

$$\gamma \cdot \alpha = D^* \cdot \varphi$$

mit $\alpha = \frac{a}{r}$ und $\varphi = \frac{s}{r} = \frac{x}{r}$ ergibt sich

$$\gamma \frac{a}{r} = D^* \cdot \frac{x}{r}$$

$$\gamma \cdot a = D^* \cdot x \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{D^*}{\gamma} \cdot x$$

Vergleich mit $F = m \cdot a = D \cdot x \quad \Rightarrow \quad a = \frac{D}{m} \cdot x$

ergibt:

$$\frac{D}{m} = \frac{D^*}{\gamma}$$

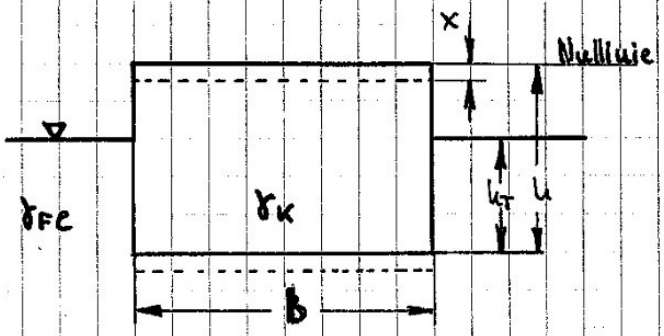
somit gilt

$$\boxed{f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D^*}{\gamma}}}$$

und

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{\gamma}{D^*}}}$$

Schwingungen eines schwimmenden Körpers



h_T = Tauchhöhe [m]
h = Höhe [m]
x = Elongation [m]
γ_K, γ_{Fe} = spez. Gewicht des Körpers, der Flüssigkeit [N/m³]

Das Tauchvolumen V_K^* beträgt:

$$V_K^* = l \cdot b \cdot h_T$$

l = Länge des Körpers [m]

Der Auftrieb ohne Schwingung beträgt:

$$F_a = \gamma_{Fe} \cdot V_K^*$$

Taucht der Körper um x in die Flüssigkeit, so erhöht sich das Tauchvolumen um ΔV_K^*

$$\Delta V_K^* = l \cdot b \cdot x$$

damit erhöht sich der Auftrieb:

$$\Delta F_a = \gamma_{Fe} \cdot l \cdot b \cdot x$$

Der Vergleich mit $F = D \cdot x$ ergibt die Richtgröße D

$$D = \gamma_{Fe} \cdot l \cdot b \quad \text{und} \quad \frac{D}{m} = \frac{\gamma_{Fe} \cdot l \cdot b}{m}$$

da $m = \rho_K V = \rho_K \cdot l \cdot b \cdot h$ und $\gamma_{Fe} = \rho_{Fe} \cdot g$ ist, gilt:

$$\frac{D}{m} = \frac{\rho_{Fe} \cdot g \cdot l \cdot b}{\rho_K \cdot l \cdot b \cdot h} = \frac{\rho_{Fe} \cdot g}{\rho_K \cdot h}$$

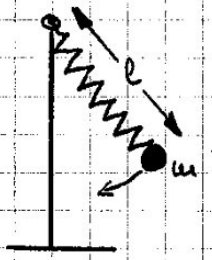
dies wird in die Freq.-formel eingesetzt:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho_{Fe} \cdot g}{\rho_K \cdot h}}$$

und

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho_K \cdot h}{\rho_{Fe} \cdot g}}$$

Schwingungskopplung



Benutzt man ein Masse-Feder-System als Pendel, so kann man unter bestimmten Umständen außer der Pendelschwingung eine Federschwingung beobachten, die allmählich entsteht.

Kann die Pendelfrequenz = Federfrequenz sein?

$\omega_P = \omega_F$ $\qquad$ ω_P, ω_F = Kreisfrequenz des

$\omega_P = \sqrt{\frac{g}{l}}$ $\qquad$ $\omega_F = \sqrt{\frac{D}{m}}$ $\qquad$ Pendels, der Feder

$$\frac{g}{l} = \frac{D}{m} \quad \text{bzw.} \quad \frac{l}{g} = \frac{m}{D} \qquad 1)$$

Ohne die Masse m hat die Feder die Länge l_0, die Masse m ergibt eine Elongation x, also ist

$l = l_0 + x$ $\qquad$ Außerdem gilt $F = D \cdot x$, $F = G$ und

$G = m \cdot g$ $\qquad$ somit ist $m \cdot g = D \cdot x$ und

$x = \frac{m \cdot g}{D}$ $\qquad$ damit wird l:

$$l = l_0 + \frac{m \cdot g}{D} \qquad 2)$$

aus 1) und 2) folgt

$$\frac{l_0 + \frac{m \cdot g}{D}}{g} = \frac{m}{D} \qquad 3)$$

$$\frac{l_0}{4q} + \frac{u}{D} = \frac{u}{D}$$

damit wird $\frac{l_0}{4q} = 0$

Da dies niemals sein kann, sind nicht die beiden Pendelfrequenzen gleich.

<u>1. Versuch</u> $\omega_p = \frac{1}{2}\omega_f$ bzw. $2\omega_p = \omega_f$

ω_f ist also doppelt so groß wie ω_p

$$2 \cdot \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{D}{u}} \quad \Rightarrow \quad 4 \cdot \frac{g}{l} = \frac{D}{u} \quad \text{bzw.} \quad \frac{l}{4g} = \frac{u}{D}$$

damit folgt für Gleichung 1)

$$\frac{l_0 + \frac{u \cdot g}{D}}{4g} = \frac{u}{D}$$

$$\frac{l_0}{4g} + \frac{u}{4D} = \frac{u}{D}$$

$$\frac{l_0}{4g} = \frac{3}{4}\frac{u}{D} \quad \Rightarrow \quad \frac{l_0}{g} = \frac{3u}{D}$$

$$\boxed{l_0 = \frac{3 \cdot g \cdot u}{D}} \qquad \boxed{u = \frac{l_0 \cdot D}{3 \cdot g}} \qquad \boxed{D = \frac{3 \cdot g \cdot u}{l_0}}$$

Das läßt sich praktisch realisieren!

Ist $\omega_f = 3, 4, 5 \cdots \omega_p$ steht anstelle der 3 eine 8, 15, 24 ---

Thema 13 Akustik

Hat eine Vorrichtungen mehr als 30 Schwingungen pro Sekunde, so kann diese Schwingung als sehr hoher Ton gehört werden. Die Luft überträgt den Ton durch adiabatische Kompression und Expansion. (Daher läßt sich auch die Schallgeschwindigkeit aus den adiabatischen Daten der Luft berechnen).

Statt $\frac{\text{Schwingungen}}{s}$ sagt man auch Hertz [Hz]

somit gilt $[f] = \frac{1}{s} = Hz$

30 Hz ist etwa der tiefste hörbare Ton
16000 ... 18000 Hz stellt die obere hörbare Grenze dar.

< 30 Hz ist Infraschall
> 20 000 Hz ist Ultraschall

Tonhöhe

Je höher die Frequenz, desto höher ist die Tonhöhe.

2 Töne benachbarter Frequenz z.B. 500 Hz und 501 Hz ergeben eine Schwebung (Auf- und Abschwellen der Lautstärke)

Lautstärke - Amplitude (max. Auslenkung)

Klangfarbe

Erklingt von mehreren Musikinstrumenten der gleiche Ton, so klingt jedes Instrument trotzdem anders. Der Unterschied liegt an der Klangfarbe. Diese setzt sich zusammen aus

1. Anteil der Oberwellen (Obertöne, Harmonische)
2. Ein- und Ausschwingvorgang

Obertöne haben stets als Frequenz ein ganzzahliges Vielfaches der Grundfrequenz. Ändert sich letztere, so ändern sich die Obertöne so, daß das Vielfache der Grundfrequenz erhalten bleibt.

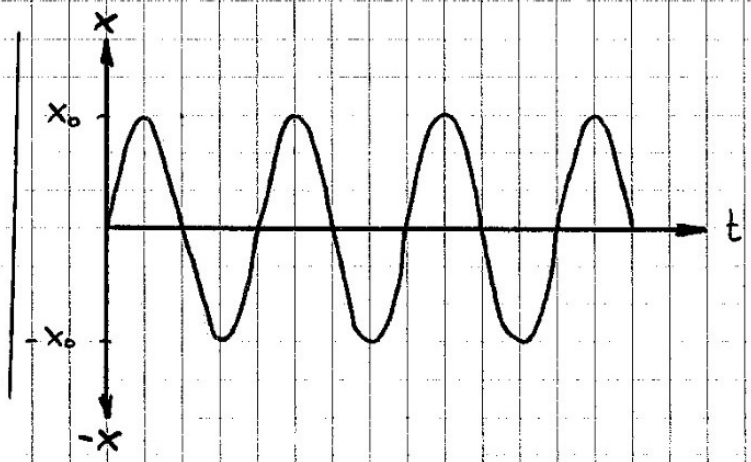
Der Grundton = 1. Harmonische
die 1. Oberwelle = 2. Harmonische

Beispiel: Ein Ton hat z.B. 7 Oberwellen, 2 Frequenzen nacheinander

	$f_1 = 100$ Hz	$f_2 = 110$ Hz
1. Harmonische	100 Hz	110 Hz
2. " = 1. Oberton	200 Hz	220 Hz
3. " 2. "	300 Hz	330 Hz
4. " 3. "	400 Hz	440 Hz
5. " 4. "	500 Hz	550 Hz
6. " 5. "	600 Hz	660 Hz
7. " 6. "	700 Hz	770 Hz

Die 6. Harmonische (5. Oberwelle) ist in der Frequenz also 6 mal größer als die Grundwelle (1. Harmonische). Das Ohr kann die Oberwellen, die alle sinusförmig sind, nicht, oder nur selten einzeln hören. Die Tonhöhe ergibt sich für das Ohr stets aus dem Grundton, die Obertöne werden gemeinsam erfaßt und ergeben den Klangeindruck.

Ein absolut obertonfreier Ton hat folgenden Schwingungsverlauf.



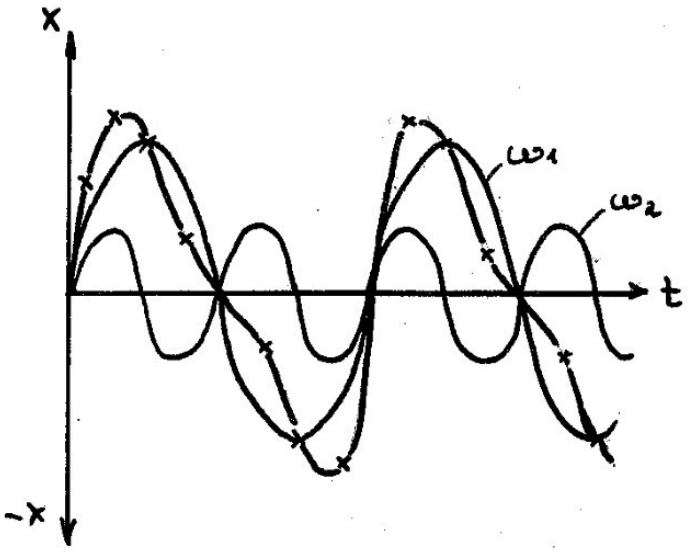
Mathematische Gleichung einer Grundschwingung:

$$x = x_0 \cdot \sin \omega t \qquad \omega = 2\pi f$$

Die Töne von Musikinstrumenten oder die der Sprache haben meist komplizierte Schwingungsformen, die man aber aus Grundton und Obertön zusammengesetzt denken kann. Wie sich eine komplizierte Schwingung durch Addition der Grundschwingung mit Oberwellen bildet, kann man schon mit nur 1 Oberwelle zeigen.

Die mat. Elongation wird statt x_0 r_1, r_2 etc. genannt.

Addition der Grundschwingung + 1. Oberwelle



z.B. 100 Hz + 200 Hz

$\omega_1 = 2\pi f_1$

$\omega_2 = 2\pi f_2$

$f_1 = 100\,Hz$

$f_2 = 200\,Hz$

x-x-x = Resultierende (x_{ges})

$x_1 = r_1 \sin \omega_1 t \qquad x_2 = r_2 \sin \omega_2 t$

$x_{ges} = x_1 + x_2$

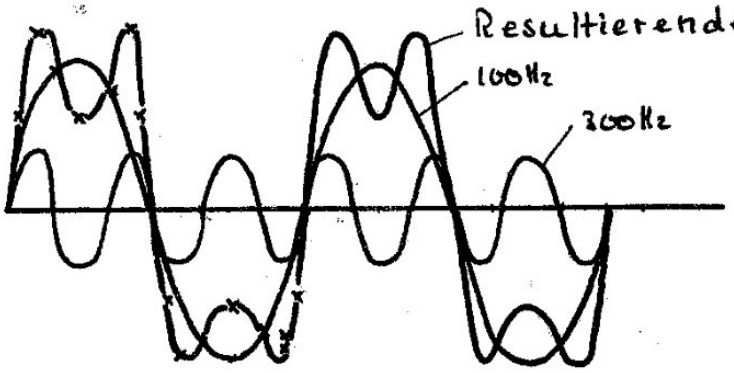
$\underline{x_{ges} = r_1 \sin \omega_1 t + r_2 \sin \omega_2 t}$

da $\omega_2 = 2 \cdot \omega_1$ ist kann man schreiben

$x_{ges} = r_1 \sin \omega_1 t + r_2 \sin 2\omega_1 t$

Addition der Grundwelle + 2. Oberwelle

z.B. 100 Hz + 300 Hz



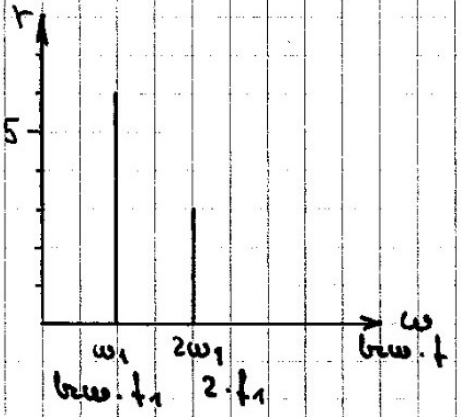
$x_1 = r_1 \sin \omega_1 t$ da $x_2 = 0$ ist, gilt:

$x_3 = r_3 \sin 3\omega_1 t$

$x_{ges} = r_1 \sin \omega_1 t + r_3 \sin 3\omega_1 t$

Klangspektrum

Zeichnet man Grundton und Obertöne als Striche, deren Höhe der Amplitude der einzelnen Schwingungen (r_0, r_1, r_2 usw.) entspricht, ins einem Amplituden / Frequenzdiagramm ein, so erhält man ein Klangspektrum.



Der Grundton hat eine Amplitude von 6 Einheiten, die 1. Oberwelle von 4 Einheiten.
d.h. $r_1 = 6$ $r_2 = 4$

$x_{ges} = 6 \sin \omega_1 t + 4 \sin 2\omega_1 t$



$r_1 = 6$
$r_2 = 5$
$r_3 = 1$
$r_4 = 3$

$x_{ges} = \sum_{i=1} r_i \sin n_i \omega_1 t$

$x_{ges} = 6 \sin \omega_1 t + 5 \sin 2\omega_1 t + 1 \sin 3\omega_1 t + 3 \sin 4\omega_1 t$

Thema 14 Schall

Der Schall breitet sich kugelförmig aus.

c = Schallgeschwindigkeit = 333 $\frac{m}{s}$

λ = Wellenlänge, ist die Strecke die eine Schwingung zurücklegt.

In 1 Sekunde wird die Strecke λ f-mal zurückgelegt. Dies ist gleich c.

$$\lambda \cdot f = c$$

Beispiel:

$c = 333 \frac{m}{s}$ $\quad f = 100\ Hz$

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{333\ m \cdot s}{100\ s} = 3{,}33\ m$$

$$\underline{\lambda = 3{,}33\ m}$$

Schallleistung

Um z. B. eine Membrane ständig zu Schwingungen anzuregen, benötigt man eine Leistung.

Ein Empfänger (Hörer) nimmt einen Ton umso lauter wahr, je größer seine Empfangsfläche ist.

Schallintensität I

$$I = \frac{P}{A}$$

P = Schalleistung vom Sender

A = Empfangsfläche = Empfänger

$[P] = W$ bzw. μW

$[A] = m^2$

$[I] = \frac{W}{m^2}$ bzw. $\frac{\mu W}{m^2}$

Schalldruck p

Die Schallwellen rufen eine Druckänderung hervor.

$[p] = \frac{N}{m^2}$ meist jedoch in mbar

$1 mbar = 100 \frac{N}{m^2}$

Schallpegel L

= Intensitätsverhältnis zweier Schallstärken

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0} \quad [dB]$$

$I_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$ kleinste noch hörbare Intensität

Phon

Ein Ton mit einem Pegel von 20 dB entspricht einer Intensität von 10^{-10} W/m², wie man leicht errechnen kann:

$$L = 10 \lg \frac{I}{I_0} = 10 \lg \frac{10^{-10}}{10^{-12}} = 10 \lg 100 = 10 \cdot 2$$

$$\underline{\underline{L = 20 \text{ dB}}}$$

Einem solchen Ton hört das Ohr aber nicht immer mit der gleichen Lautstärke:

Bei	1000	Hz	hört man ihn	mit	20	phon	
"	500	"	"	"	20	"	
"	200	"	"	"	10	"	
"	100	"	"	"	nicht mehr		
"	3000	"	"	"	mit	28	phon
"	10 000	"	"	"	"	8	"

Diese Werte sind experimentell gefunden worden.

Interferenz

2 Schwingungen gleicher Frequenz aber entgegengesetzt gleich großer Amplitude löschen sich aus.

Durch Reflexion kann aus 1 Schwingung die entsprechend entgegengesetzte Schwingung entstehen und dadurch an bestimmten Stellen in einem Raum ein sog. „akustischen Loch" entstehen.

Thema 15 Licht

Licht ist eine elektromagnetische Schwingung hoher Frequenz.

Sichtbares Licht hat eine Wellenlänge von ca. 400 - 800 nm.

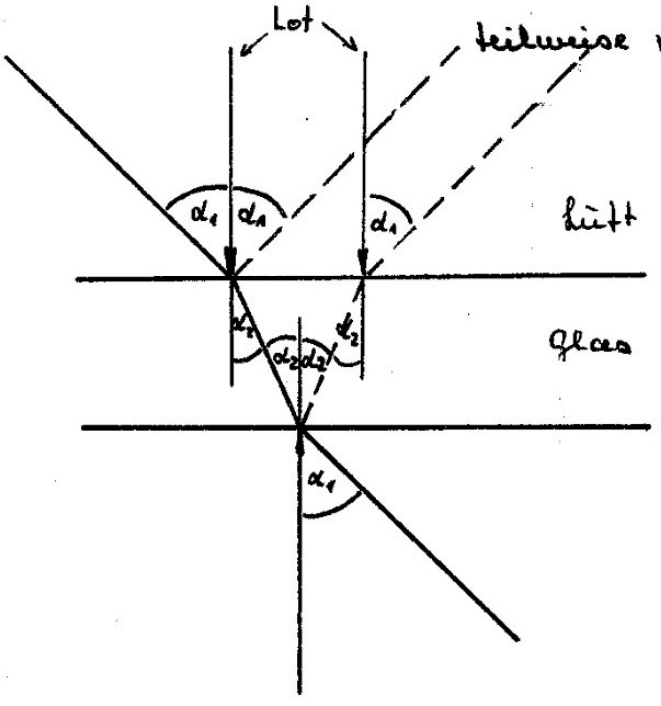
Die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = 300\,000 \frac{km}{s}$

$c = \lambda \cdot f$ Ist $f = 30$ MHz wird $\lambda = 10$ m

$f = 10$ MHz " $\lambda = 30$ m (Rundfunkskala)

Die Farbe des Lichtes hängt von der Wellenlänge ab. Es gibt Farben einer einzelnen Wellenlänge und solche eines Wellenlängengemisches.

Planparallele Platte



α_1 = Winkel im optisch dünneren Medium

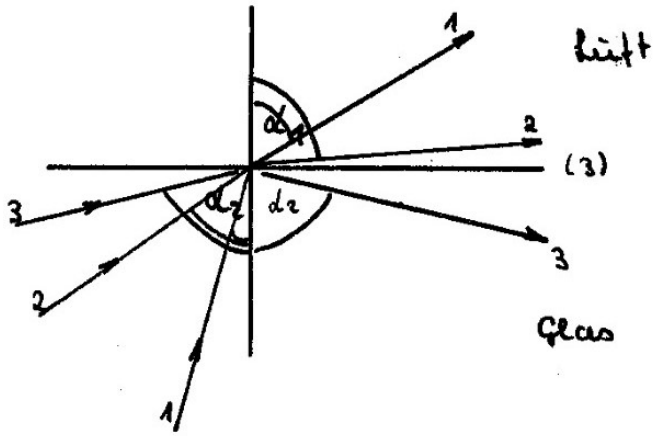
α_2 = Winkel im optisch dichteren Medium

Brechungsindex

$$n = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$$

n ist eine Konstante, die nur von der Art des optisch dünneren und dichteren Mediums abhängt. Allerdings ändert sich n auch mit der Wellenlänge.

Totalreflexion



Wählt man α_2 immer größer nimmt α_1 natürlich zu. Da $\alpha_1 > \alpha_2$ ist wird α_1 bei Strahl 3 gerade 90°. Genau an dieser Stelle tritt der Strahl 3 nicht aus der Glasplatte heraus, sondern wird im Winkel α_2 total reflektiert.

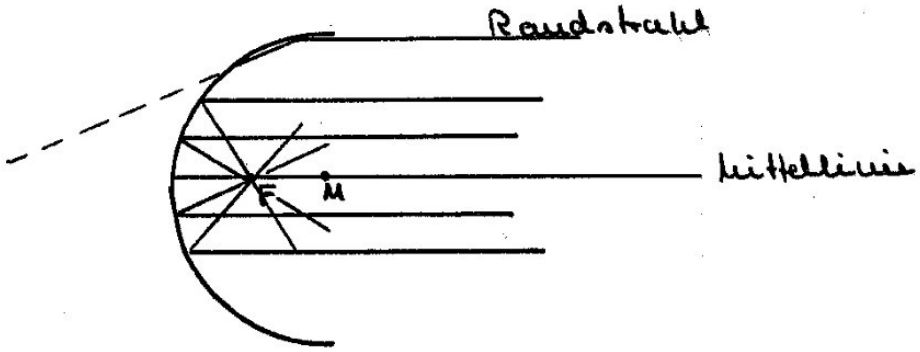
Wählt man α_2 noch größer so werden auch diese Strahlen total reflektiert.

$\alpha_1 = 90°$, $\sin \alpha_1 = 1$

$$\sin \alpha_2 = \frac{1}{n}$$

Thema 16 Optik

Kugelspiegel

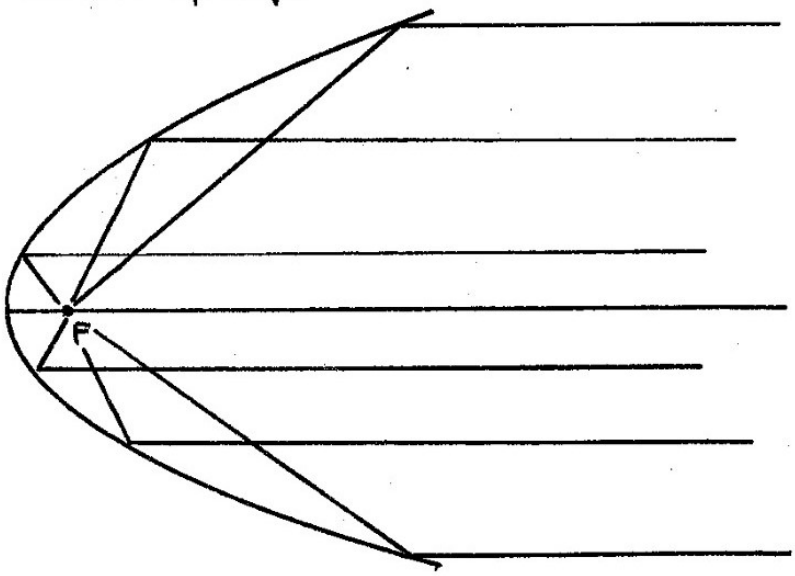


Parallele Strahlen treffen sich im Brennpunkt F.
M = Mittelpunkt der Kugel.
F liegt genau auf dem $\frac{1}{2}$ Radius.

Fehler des Kugelspiegels

Nur Parallelstrahlen nahe der Mittellinie treffen sich in F. Ein Randstrahl wird hinter dem Brennpunkt reflektiert.

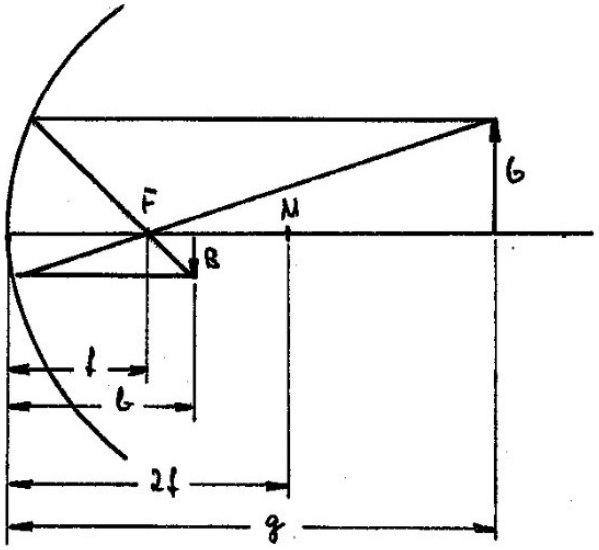
Parabolspiegel



Alle Parallel-strahlen treffen sich in F.

Zur Darstellung eines Strahlengangs genügt meist ein Kugelspiegel, wenn die Strahlen nicht zu weit von der Mittellinie entfernt sind.

Strahlengang $g > 2f$



f = Brennweite

b = Bildweite

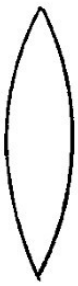
g = Gegenstandsweite

B = Bildgröße

G = Gegenstandsgröße

Thema 17 Linsengesetze

Konvexlinsen (Sammellinsen)



bikonvex



plankonvex



konkavkonvex

Konkavlinsen (Zerstreuungslinsen)



bikonkav



plankonkav



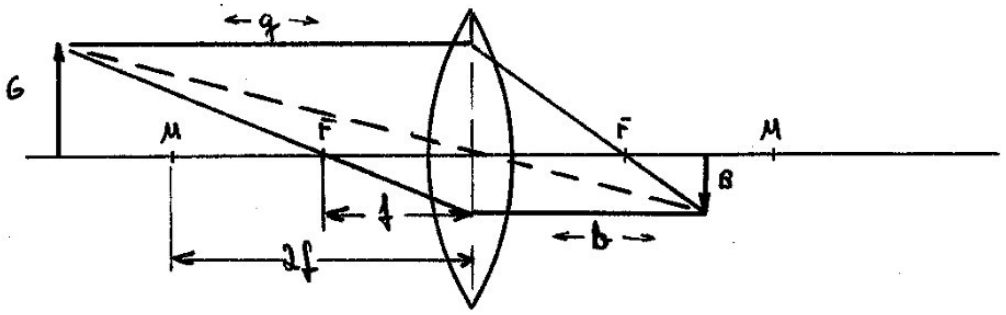


konvexkonkav

Konvexlinsen sind in der Mitte dicker als am Rand.
Bei Konkavlinsen ist es umgekehrt.

Strahlengang an Konvexlinsen

$g > 2f$



M ≙ 2f G = Gegenstandsgröße g = Gegenstandsweite

F ≙ f B = Bildgröße b = Bildweite

Abbildungsgleichung (Strahlensatz) (math.)

$$\frac{G+B}{g} = \frac{B}{f} \quad \text{und} \quad \frac{G+B}{b} = \frac{G}{f}$$

Beide Gleichungen addiert:

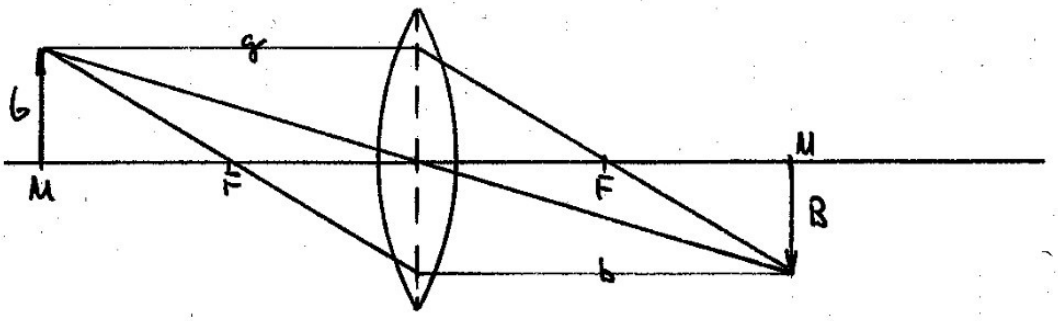
$$\frac{G+B}{g} + \frac{G+B}{b} = \frac{B}{f} + \frac{G}{f}$$

$$\frac{G+B}{g} + \frac{G+B}{b} = \frac{B+G}{f} \qquad \{ G+B = B+G$$

$$\boxed{\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}}$$

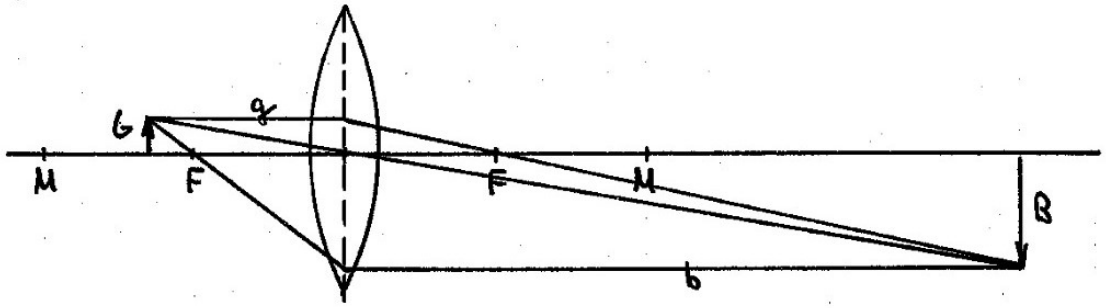
$$g = \frac{f \cdot b}{b-f} \qquad b = \frac{f \cdot g}{g-f}$$

$g = 2f$



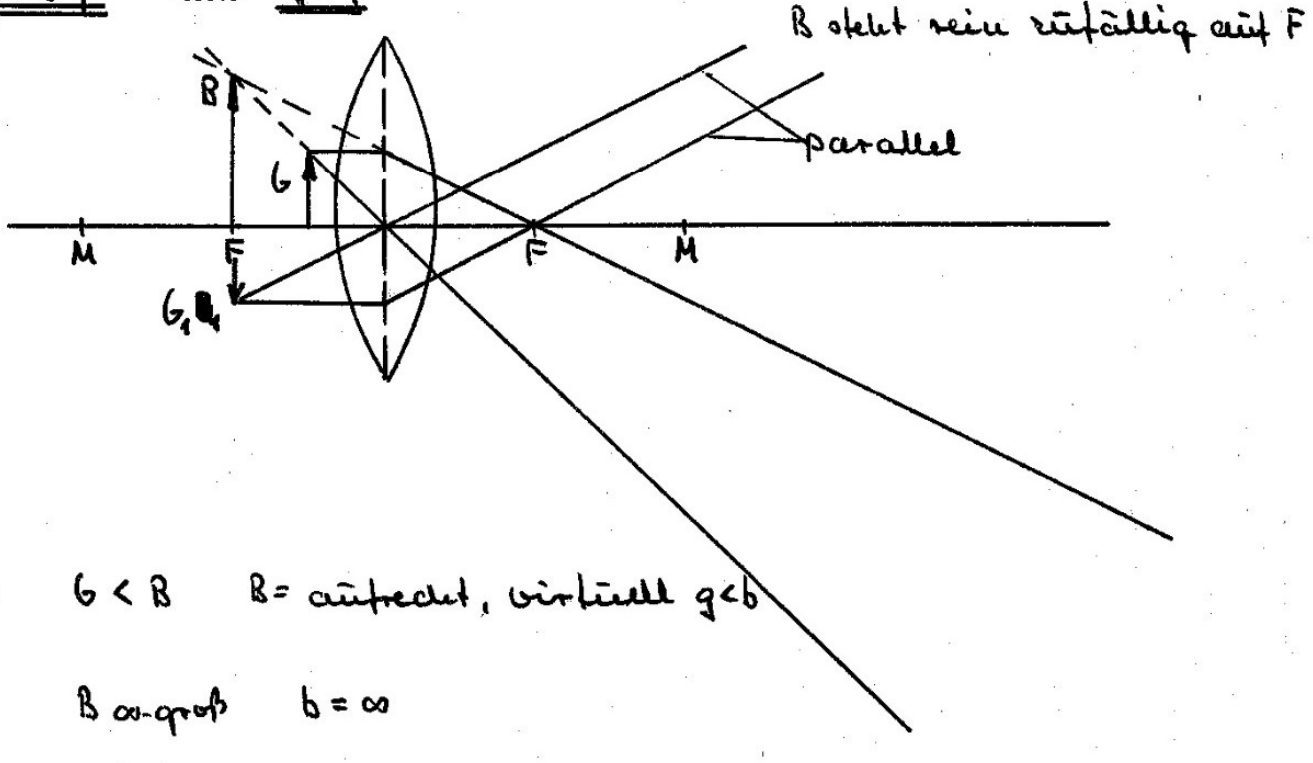
$G = B$ B = umgekehrt, reell $g = b$

$2f > g > f$



$G < B$ B = umgekehrt, reell $g < b$, $b > 2f$

$g < f$ und $g = f$

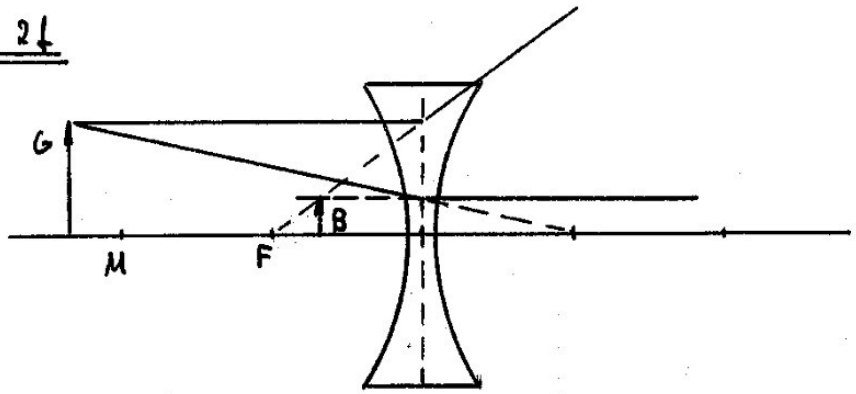


$g < f$: $G < B$ B = aufrecht, virtuell $g < b$

$g = f$: B ∞-groß $b = \infty$

Strahlengang an Konkavlinsen

$g > 2f$



Zeichnen Sie $g = 2f$, $2f > g > f$, $g = f$, $g < f$

Reelle Bilder: können auf einem Schirm projiziert werden.

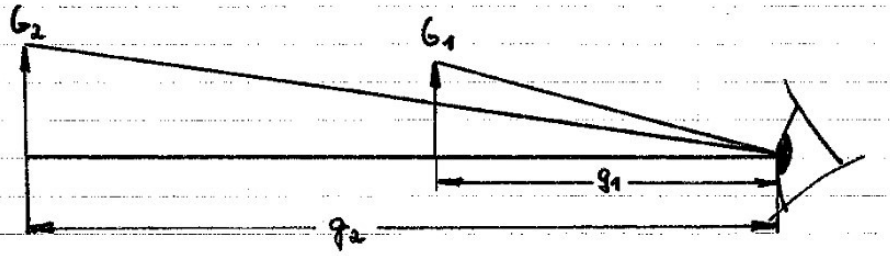
Virtuelle Bilder: können nicht auf einem Schirm abgebildet werden, sind aber für das menschliche Auge sichtbar.

Füllen Sie nachstehende Tafel aus:

Gegenstandsweite	Bildweite	Bildgröße	Bildform
konvex			
$g > 2f$	$2f > b > f$	$B < G$	reell
$2f > g > f$			
$g < f$			
$g = 2f$			
konkav			
$g > 2f$			
$2f > g > f$			
$g < f$			
$g = 2f$			

Optische Geräte

Definition der Vergrößerung



Die „Größe" eines Gegenstandes ist $\frac{G}{g}$

Das Verhältnis zweier Größen ist die Vergrößerung v

$$v = \frac{\frac{G_2}{g_2}}{\frac{G_1}{g_1}} = \frac{G_2 \cdot g_1}{g_2 \cdot G_1} \quad \text{oder umgekehrt} \quad v = \frac{G_1 \cdot g_2}{g_1 \cdot G_2}$$

Beispiel

$G_2 = 3\,cm \quad g_2 = 20\,cm$

$G_1 = 2.5\,cm \quad g_1 = 9\,cm$ ges. v

$$v = \frac{3 \cdot 9}{20 \cdot 2{,}5} = \frac{27}{50} = 0.54 \quad \text{umgekehrt} \quad v = \frac{2.5 \cdot 20}{3 \cdot 9} = 1.86$$

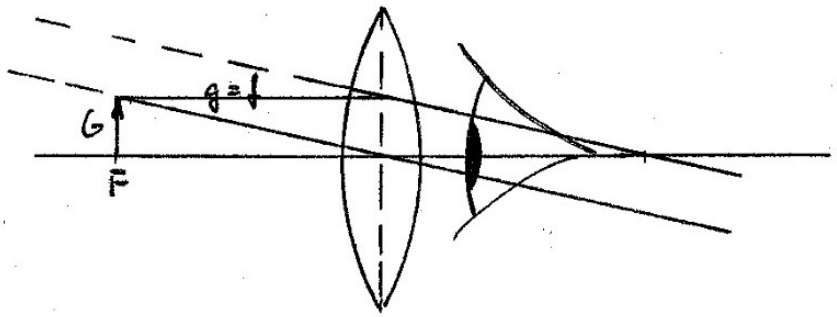
Die Vergrößerung ist eine Bezugsgröße. In der Optik wird sie stets auf das Bild am Okular bezogen, d.h.

$$v = \frac{\text{„Bildgröße"}}{\text{„Gegenstandsgröße"}}$$

Die Lupe

Die kürzeste Entfernung, die ein Gegenstand zum Auge (ohne Lupe) haben kann, beträgt 25 cm. Dann ist die „Gegenstandsgröße" $\frac{G}{25}$

Bei einer Lupe ist $g = f$. Dadurch scheint der Gegenstand im Unendlichen zu sein, und die Belastung des Auges beim Betrachten ist am geringsten.



$$v = \frac{\text{„Gegenstandsgröße" mit Lupe}}{\text{„Gegenstandsgröße" ohne Lupe}}$$

$$v = \frac{G \cdot 25}{f \cdot G} = \frac{25}{f}$$

$$\boxed{v = \frac{25}{f}}$$

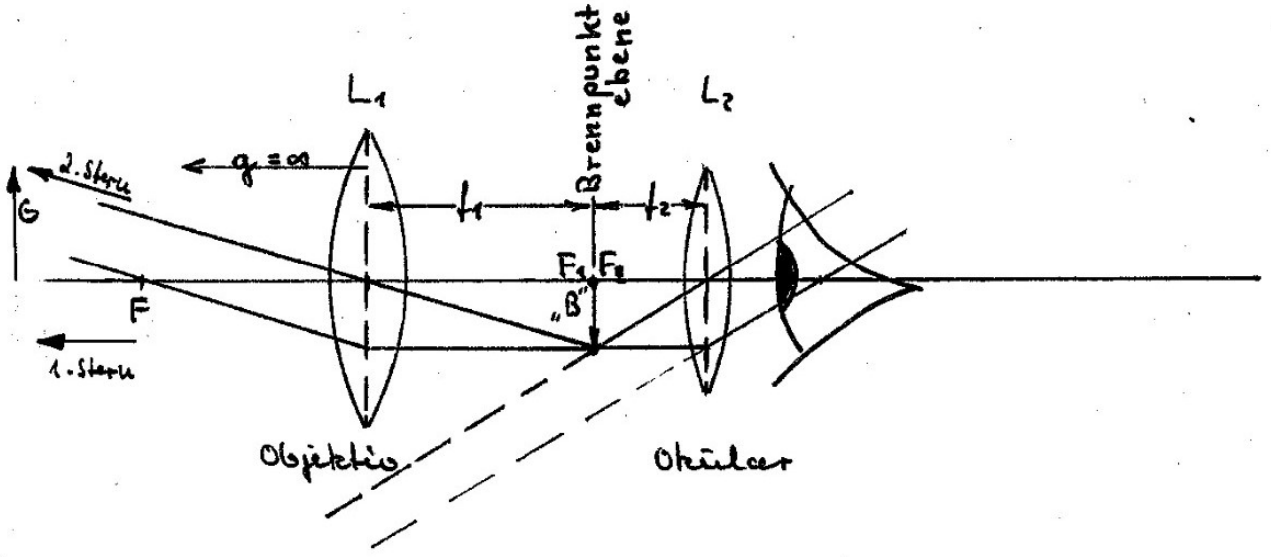
f sollte demnach kleiner als 25 cm sein, damit v größer als 1 wird. Bestenfalls kann f = 1 cm sein, da sonst die Linse zu dick und unvollkommen wird. Dann ist $v = \frac{25}{1} = 25$ fach. Das ist die maximale Lupenvergrößerung!

Himmelsfernrohr

Betrachtet werden Sterne oder Gegenstände, die nahezu im Unendlichen liegen. Das Bild eines solchen Gegenstandes würde in der Brennpunktebene liegen oder sogar im Brennpunkt selbst.

Sterne können nicht vergrößert werden, da ihre Entfernung ∞ groß ist, man sieht sie auch in großen Fernrohren als Punkte. Wohl aber scheint der Abstand zweier Sterne sich zu vergrößern, so daß weiter dazwischen liegende Sterne deutlich sichtbar werden.

Die Strahlen eines Sternes sind stets parallel und bilden zu denen eines auf der verlängerten Mittellinie liegenden Sternes einen bestimmten Winkel.



Die Entfernung beider Sterne ist „B" in der Brennpunktebene.
Beide Brennpunkte liegen zusammen.

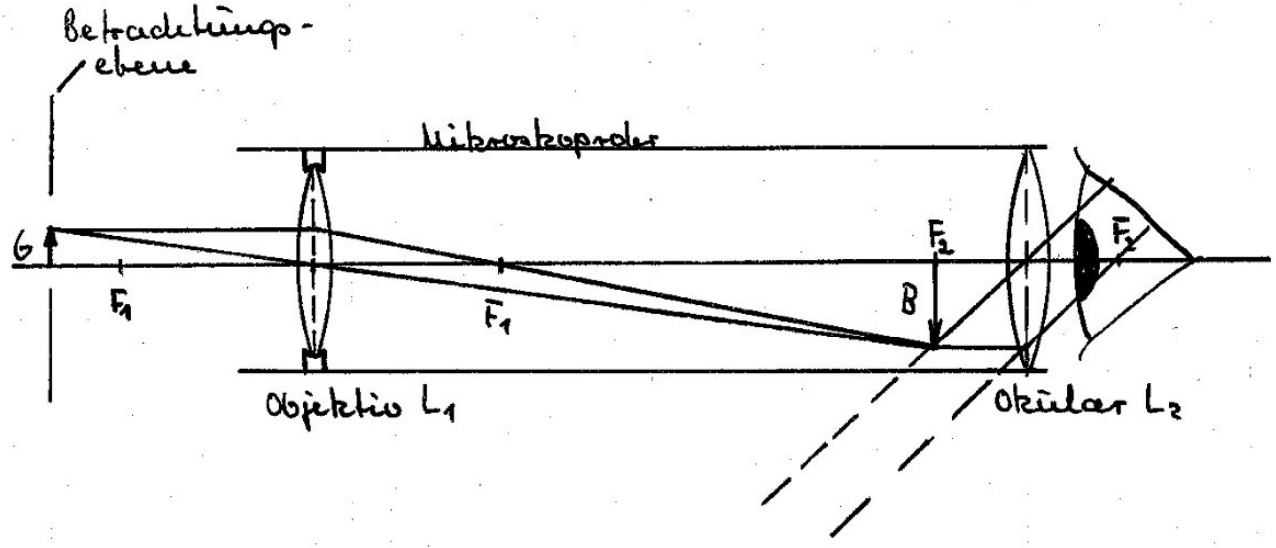
Die „Gegenstandsgröße" $\frac{G}{g} = \frac{B}{f_1}$

Die „Bildgröße" $\frac{B}{b} = \frac{B}{f_2}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Die „Gegenstandsgröße"}\ \frac{G}{g} = \frac{B}{f_1} \\ \text{Die „Bildgröße"}\ \frac{B}{b} = \frac{B}{f_2}\end{array}\right\} \quad v = \frac{B \cdot f_1}{f_2 \cdot B} \qquad \boxed{v = \frac{f_1}{f_2}}$$

Mikroskop

Der Gegenstand steht nahe dem Brennpunkt, aber zwischen M und F. Das Bild wird dann mit einer Lupe betrachtet.



Durch die Abmessungen des Mikroskoprohrs liegt die Betrachtungsebene und damit das Verhältnis G : B bzw. B : G fest. Dies ist das Abbildungsverhältnis β des Objektivs. Das Bild wird mit der Lupe vergrößert. Die Gesamtvergrößerung v_M beträgt.

$v_M = \beta \cdot v_L$ $\quad$ v_L = Lupenvergrößerung

β und v_L werden auf dem Objektiv bzw. Okular angegeben.

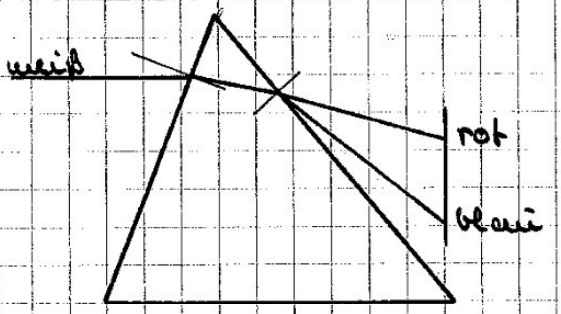
z.B. Objektiv $\beta = 40:1$ (40x), $\quad v_L = 12\times$

$v_M = 40 \cdot 12 = 480$ fach.

v_M kann max. ca. 1000fach betragen.

Eigenschaften des Lichts

Weißes Licht läßt sich an einem Prisma in ein Farbenspektrum zerlegen



Bei allen Lichtbrechungen wird blau stärker als rot gebrochen.

Beim Regenbogen werden die Sonnenstrahlen, die in einen Regentropfen eindringen, gebrochen, in das Farbspektrum zerlegt und zum Betrachter zurückgeworfen.

Das Blau des wolkenlosen Himmels entsteht durch Lichtbrechung an den Sauerstoff-, Stickstoff- und Wassermolekülen etc. in der Luft. Ohne Atmosphäre wäre der Himmel pechschwarz und man könnte Sterne sehen, wie auf dem Mond. An den Molekülen wird vorwiegend blaues Licht gebrochen, und da der Himmel nur reflektiertes bzw. gebrochenes Licht liefert, ist dieses vorwiegend mit Blau angereichert, allerdings verbleibt noch ein Anteil weißes Licht.

Beim Abend- und Morgenrot fehlt dem schwachen Licht der blaue Anteil, so daß der Teil überwiegt, der am wenigsten gebrochen wird, nämlich Rot.