Numerische Lösung von Differentialgleichung

Eine Einführung

Viele Berechnungen beruhen auf Differentialgleichungen. Viele davon lassen sich analytisch, d.h. manuell unter Anwendung bestimmter Methoden (Trennung der Variablen) lösen. Leider gibt es Fälle, bei denen das leider nicht so ist. Jeder, der sich mit diesem Thema befasst hat, weiß, dass nicht jedes Integral und nicht jede Differentialgleichung analytisch lösbar ist.

Wir befassen uns daher mit dem Thema „Wie kann man Differentialgleichung numerisch unter Zuhilfename Verwendung von Excel-VBA lösen?“ Wir behandeln bewusst keine mathematischen Hilfsprogramme wie etwa Mathcad.

Die bekanntesten numerischen Methoden heißen Euler (Euler-Cauchy) und Runge-Kutta.

Leonhard Euler, Schweizer Mathematiker, 1707 in Basel geboren, publizierte seine Methode 1768. Cauchy, französischer Mathematiker, 1789 in Paris geboren, wurde als Anwender der Euler bekannt.

Carl Runge, deutscher Mathematiker, geboren 1856 in Bremen, 1886 Prof. an der TH Hannover entwickelte in Göttingen zusammen mit Martin Wilhelm Kutta, geboren 1867 in Pitschen, deutscher Mathematiker, 1909 Prof. an der TH Stuttgart, eine Methode zur numerischen Lösung von Anfangswertproblemen.

Wir behandeln zunächst die Euler Methode am Beispiel einfacher mathematischer Differenzialgleichungen.

Die allgemeine Form der Differentialgleichung 1. Ordnung lautet wie folgt:

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

1. Ordnung bedeutet hier 1. Ableitung der Variablen. Im Unterschied dazu gibt es auch den Ausdruck vom 1. Grad. Damit ist der Exponent der Variablen gemeint.

Diese Gleichung beschreibt u.a. die chemische Gleichung A -> B und ist die Ableitung der gesuchten Funktion

$$y = g(x)$$

Die analytische Lösung ist bekanntlich eine e-Funktion.

Für die numerische Lösung erfolgt eine Umwandlung in eine Differenzengleichung

$$y' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = f(x, y)$$

Durch Umformen nach Δy erhält man

$$\Delta y = f(x, y)\Delta x$$

Nun kann man, wenn die Ausgangsdaten für x und y gegeben sind, die Gleichung Schritt für Schritt lösen, indem man alle Δx und alle Δy aufsummiert. Mit x_0 und y_0 als Anfangswert erhält man mit der Gleichungen

$$y_1 = y_0 + \Delta y$$

$$y_1 = y_0 + f(x, y)\Delta x$$

Darin ist

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

So ergibt sich, wenn x_0 und y_0 gegeben ist, mit einer Schrittweite Δx der 1. Schritt:

$$x_1 = x_0 + \Delta x$$

x_0 und y_0 werden in f(y_0, x0) eingesetzt und man erhält

$$y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)\Delta x$$

Nun sind x und y gegeben. Der 2. Schritt ist dann:

$$x_2 = x_1 + \Delta x$$

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)\Delta x$$

Nun sind x_1 und y_1 gegeben. Der 3. Schritt ist daher

$$x_3 = x_2 + \Delta x$$

$$y_3 = y_2 + f(x_2, y_2)\Delta x$$

usw.

Die allgemeine Rechenregel lautet daher:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\Delta x$$

Δx ist die Schrittweite, die häufig auch den Buchstaben h erhält.

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h$$

Mit dieser Rechenregel fährt man fort bis man den Zielwert für x erreicht hat. Man vergleiche die analytische Lösung mit der numerischen.

Beispiel 1:

$$y' = \frac{dy}{dx} = x$$

Die Integration in Grenzen liefert

$$y_1 - y_0 = \frac{1}{2}\left(x_1^2 - x_0^2\right)$$

Mit y_0 = 1 und x_0 = 1 und x_1=1,1 (h=Δx=0,1) erhält man y_1= 1,105 als exakte Lösung.

Die numerische Lösung ergibt sich zu

$$\Delta y = x\Delta x$$

$$y_1 = y_0 + x_0 h$$

Mit den genannten Startdaten y_0 = 1 und x_0 = 1 und h=0,1 erhält man

y_1=1 + 1*0,1= 1,1

Der Fehler ist gering und beträgt 1,105 -1,1 = 0,005 = 0,5 %.

Wählt man bei gleichen Anfangsdaten, d.h. x_0=1 und y_0=1 die Schrittweite h=Δx=1, dann wird x_1=2 und man erhält analytisch y_1=2,5. Numerisch erhält man

y_1=1 + 1*1 = 2,0 was um 0,5 kleiner als die analytische Lösung. Der Fehler beträgt daher 20%. Daraus lasst sich schließen, dass h=Δx klein gegen x sein sollte.

Beispiel:

$$y' = \frac{dy}{dx} = xy$$

Die allgemeine analytische Lösung lautet

$$\frac{dy}{y} = xdx$$

Die Integration in Grenzen liefert

$$\ln y_1 - \ln y_0 = \left(x_1^2 - x_0^2\right)$$

Die numerische Lösung lautet

$$\Delta y = xy \cdot h$$

Wählt man x_0 = 1 und y_0 = 1 und h=Δx=0,1, d.h. x_1= x_0 + h=Δx = 1,1, so erhält man analytisch

ln(y_1)=$1{,}1^2$ -1 =0,21

Daraus ergibt sich y_1 = 1,23367

Numerisch erhält man

y_1=y_0+$x_0$$y_0$h = 1 +1*1*0,1= 1,1

Der Wert ist um 0,13367 zu klein, h ist also zu groß gewählt.

E-Mail: ws@chemievt.de - www.chemievt.de -

In diesen Beispielen wurde nur ein einziger Schritt der Differentialgleichung gelöst. Die Differentialgleichung war so einfach gewählt, dass man sie analytisch integrieren konnte. Um den Verlauf von y über eine längere Distanz von x berechnen zu wollen, müssten viele derartige Schritte folgen, wie oben bereits gezeigt.

Das bisher besprochene Eulerverfahren (Euler-Cauchy) ist mathematisch das einfachste aller Verfahren aber auch das ungenaueste. Die Abweichung von einer analytischen Lösung ist direkt proportional der Schrittweite h. Das Eulerverfahren geht von einem linearen Verlauf der Differentialgleichung innerhalb der Schrittweite h aus und berechnet den nächsten Schritt Δy linear aus x. Führ eine Differentialgleichung dieses Typs wäre das Eulerergebnis tatsächlich exakt, und die Lösung wäre eine Parabel.

Eine Verbesserung besteht nun darin, dass Δy nicht aus x alleine, sondern aus dem Mittelwert für x und x+ Δx berechnet wird. Damit erhält man das prediktive (verbesserte) Euler Verfahren mit der Genauigkeit proportional h^3. Es sind weitere Methoden zur Verbesserung des Euler-Verfahrens entwickelt worden, die bei vergleichbarer Genauigkeit und mit etwas höherem mathematischen Aufwand eine erheblich kürzere Rechenzeit aufweisen. Das bekannteste Verfahren ist das Runge-Kutta-Verfahren. Dessen Abweichung von einem analytischen Ergebnis ist proportional der Schrittweite h^4. Das Runge-Kutta-Verfahren verwendet 4 Stützstellen zur Berechnung von Δy.

Vergleich durch mehrfache Halbierung der Schrittweite:

Am Beispiel y‘ = xy kann man die Genauigkeiten mit dem analytischen Ergebnis für x_0=0, y_0=1 und x=1 vergleichen. Die analytische Lösung lautet: $y=y_0e^{0,5x}$. Mit x=1 wird y=1,648721271. Euler liefert nach 2048 Halbierungsschritten einen Fehler von 0,0325%, das verbesserte Euler liefert nach 512 Schritten, d.h. 2 Halbierungen weniger, einen Fehler von 1,03 10^{-3}%, Runge-Kutta liefert nach 64 Schritten einen Fehler von nur 42 10^{-9}.

Die Bedeutung der numerischen Lösung einer Differentialgleichung besteht darin, dass sie meist universell auf alle Typen von Differentialgleichungen angewandt werden kann. Das Verfahren ist stets dasselbe. Voraussetzung ist aber, dass die o.g. allgemeine Form gilt:

$$\Delta y = f(x,y)\Delta x$$

Bei Differenzialgleichungen höherer Ordnung bedient man sich der Substitution, um den Ordnungsgrad zu reduzieren. Dadurch entstehen n Gleichungen erster Ordnung. Das lässt sich leicht an einem Beispiel erläutern. Die allgemeine Form einer Differentialgleichung 2. Ordnung lautet:

$$y'' = f(x,y,y')$$

Das Prinzip ist grundsätzlich einfach. Man substituiert y und y‘‘, y‘ ergibt sich aus den nachstehenden Beziehungen

y_1 =y

y_2‘=y‘‘

weiterhin gilt

y_2=y‘

und

E-Mail: ws@chemievt.de - www.chemievt.de -

$y_1' = y' = y_2$

Die Substitutionen für y und y'' werden in die obige Gleichung eingesetzt, dabei ergibt sich y' aus den Ableitungen:

$$y_2' = f(x, y_1, y_1')$$

Als nächstes muss die Beziehung zwischen y_1 und y_2 als 2. Differentialgleichung hinzugefügt werden

$$y_1' = y_2$$

Damit hat man 2 Differentialgleichungen 1. Grades für die Variablen y_1 und y_2 erhalten. Die numerische Lösung erfolgt nach dem o.g. Schema.

Beispiel Schwingungsleichung:

$$y'' = -ay$$

Man substituiert y'' und y.

$y_2' = y''$

$y_1 = y$

In die Gleichung eingesetzt

$$y_2' = -ay_1$$

Die Beziehung zwischen den beiden Substituenten y_1 und y_2 ist:

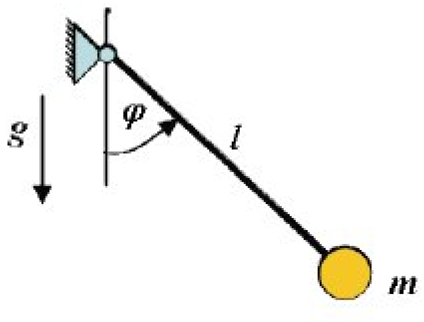
$$y_1' = y_2$$

Damit erhält man ein Differenzialgleichungssystem 1. Grades.

Beispiel Pendel:

$$ml^2\varphi'' = -mgl\sin(\varphi)$$

Darin ist m die Pendelmasse, l die Pendellänge, φ der Pendelwinkel, g=9,81 m/s² die Erdbeschleunigung. Der Pendelstab wird ohne Masse angenommen.



Aus dem Kräftegleichgewicht erhält man die Differentialgleichung 2. Ordnung (Die vollständige Ableitung findet man vielfach in der Literatur und bei Wikipedia.

).

$$\varphi'' = -\frac{g}{l}\sin(\varphi)$$

Mit den zwei Substitutionen $z_1=\varphi$, $z'_2=\varphi''$

Substituiert man φ und φ'' erhält man

$$z_2^{'} = -\frac{g}{l}\sin(z_1)$$

Weiterhin gilt aus $z_2= z'_1$ (= φ')

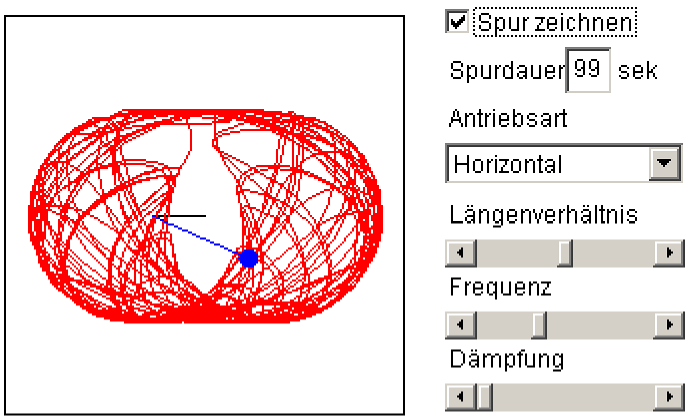
$$z_1^{'} = z_2$$

Damit erhält man wieder 2 Differenzialgleichungen 1. Grades.

Beispiel: erzwungene Schwingung

$$d^2\varphi/dt^2 + \gamma d\varphi/dt + \omega_0^2 sin\varphi - -d^2(x_0/l)/dt^2 cos\varphi + d^2(y_0/l)/dt^2 sin\varphi$$

Die simulierte Applet-Lösung ergibt eine quasi chaotische Lösung



Quelle: Malerczyk, FH Friedberg.

Beispiel komplexes Federpendel:

Das hier besprochene Pendel besteht aus einer masselosen Feder mit einer Masse an dessen Ende. Bekannt ist, dass die Masse auf- und abschwingt. Gleichzeitig stellt dieses Pendel aber auch ein normales Pendel dar, weshalb es in der Lage wäre, hin und her zu schwingen. Tatsächlich kann es beide Bewegungen gleichzeitig ausführen. In einem Versuch lässt sich beobachten, dass die Pendelschwingungen ineinander übergehen. Das sollte die mathematische Lösung ebenfalls ergeben.

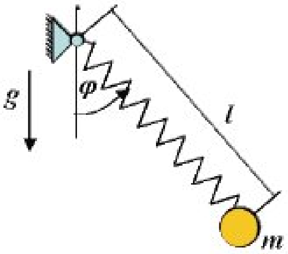
Im Kräftegleichgewicht gilt:

$$\begin{aligned} m\cdot(l(t)\ddot{\varphi}(t)+2\dot{l}(t)\dot{\varphi}(t)) &= -mg\sin(\varphi(t)) \\ m\cdot(\ddot{l}(t)-l(t)\dot{\varphi}^2(t)) &= -c(l(t)-l_F)+mg\cos(\varphi(t)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow$$

$$\ddot{\varphi}(t)=\frac{1}{l}(-g\sin(\varphi(t))-2\dot{l}(t)\dot{\varphi}(t))$$

$$\ddot{l}(t)=-\frac{c}{m}(l(t)-l_F)+g\cos(\varphi(t))+l(t)\dot{\varphi}^2(t)$$



Hier haben wir 2 Differentialgleichung 2. Ordnung, die in 4 Differentialgleichungen 1. Ordnung überführt werden müssen. l_f ist darin die Länge der Feder ohne Masse m. Die Substitutionen sind

$z_1=\varphi$, $z_2=l$, $z_3=\varphi'$, $z_4=l'$. Daraus wird $z_3'=\varphi''$ und $z_4'=l''$.

So erhält man

$z_1' = z_3$

$z_2' = z_4$

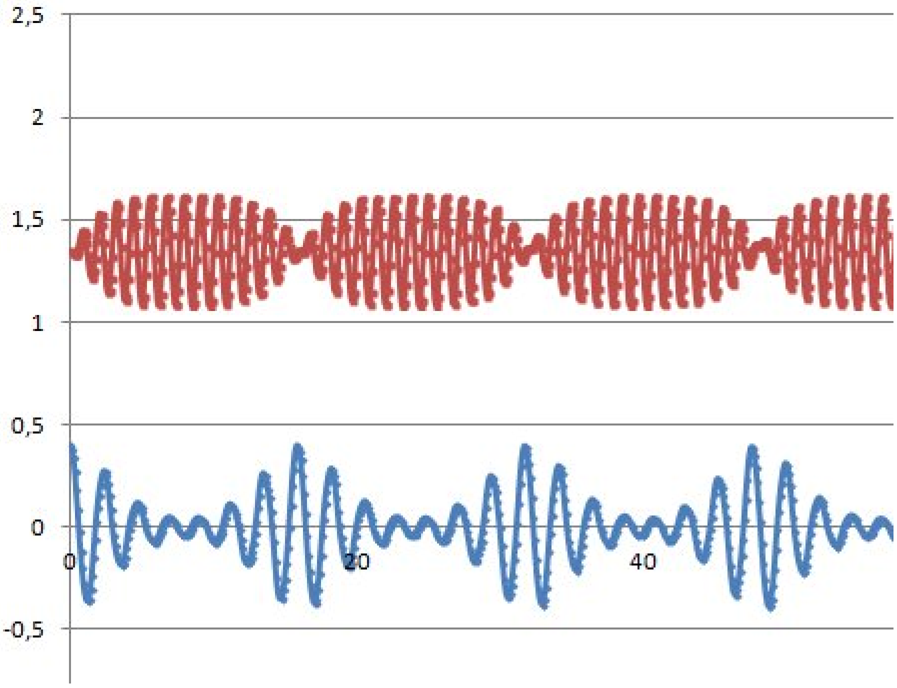
$$z_3' = \varphi'' = -\frac{1}{z_2}\left(g\sin(z_1)+2z_4z_3\right)$$

$$z_4' = l'' = -\frac{c}{m}\left(z_2-l_F\right)+g\cos\left(z_1\right)+z_2z_3^2$$

Nun hat man 4 Differentialgleichungen 1. Grades mit den Variablen $z_1 - z_4$. Die numerische Lösung ist nun einfach.

Quelle: Prof. Dr. Warendorf, München. http://w3me-n.hm.edu/professoren/warendorf/index.de.html

Ergebnis:



Das obere Bild zeigt die Federschwingung (schwingt der Länge nach) oben, sowie die Pendelschwingung (schwingt seitlich) unten. Wenn deren Frequenzen in einem ganzzahligen Resonanzverhältnis stehen, können ergeben sich Wellenpakete bilden, und zwar so, dass diese ineinander übergehen. Die Frequenz der oberen Federschwingung ist genau doppelt so groß wie die der unteren Pendelschwingung. In der Praxis sieht dieser Übergang von der einen in die andere Schwingungsart sehr überraschend aus. Wohl gemerkt, es handelt sich tatsächlich um ein einziges Pendel.

Das getriebene, gedämpfte Pendel:

Auch das sinusförmig angetriebene, gedämpfte Pendel ist ebenso wie das Lorenz-System ein System mit kontinuierlicher Zeitskala und drei Freiheitsgraden. Seine Bewegung beschreibt folgendes Differentialgleichungssystem:

$$dx/dt = v$$
$$dv/dt = -\sin(x) - \gamma v + a\cos(\psi)$$
$$d\psi/dt = \omega$$

Darin bedeuten **x** den Winkel der Auslenkung, **v** die Winkelgeschwindigkeit, γ die Dämpfung, **a** die Antriebsamplitude, ω die (Kreis-)Frequenz des Antriebs und Ψ die Phase des Antriebs. Die Pendelmasse ist dabei durch eine feste Stange, nicht durch einen Faden mit der Drehachse verbunden, so daß Auslenkungen über die Horizontalstellung hinaus und sogar Überschläge möglich sind.

Quelle: Dr. Robert Doerner, Frankfurt

Beispiel Doppelpendel, bestehend aus 2 getrennten Pendeln

$$dx/dt = y$$
$$dy/dt = [-cv^2\sin(x-u) - y^2\sin(x-u)\cos(x-u) + b\sin(u)\cos(x-u) - abc\sin(x)] / [ac - \cos^2(x-u)]$$
$$du/dt = v$$
$$dv/dt = [ay^2\sin(x-u) + v^2\sin(x-u)\cos(x-u) + ab\sin(x)\cos(x-u) - ab\sin(u)] / [ac - \cos^2(x-u)]$$

Darin bedeuten **x** und **y** den Auslenkungswinkel und die Winkelgeschwindigkeit des größeren Pendels, **u** und **v** die des kleineren Pendels. **a, b** und **c** sind Konstanten, die die Längen- und Massenverhältnisse der beiden Pendel beschreiben. Das ungestörte System bewegt sich in seinem 4-dimensionalen Phasenraum auf einer 3-dimensionalen Hyperfläche konstanter Energie. Anders gesagt: wenn man die (konstante) Gesamtenergie des Systems kennt, reichen 3 Variablen aus, um den Systemzustand eindeutig festzulegen.

Quelle: Dr. Robert Doerner, Frankfurt

Beispiel: Navier-Stokes Gleichungen, kombiniert mit der Wärmeleitungs- und Kontinuitätsgleichung:

Die nachstehenden Differentialgleichungen beschreiben das Temperatur- und Strömungsgeschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeitsschicht, die an der Unterseite beheizt und an der Oberseite gekühlt wird. Man erhält daraus durch Vereinfachungen die sog. Lorenz-Gleichung:

$dx/dt = -\delta(x-y)$

$dy/dt = Rx-y-xy$

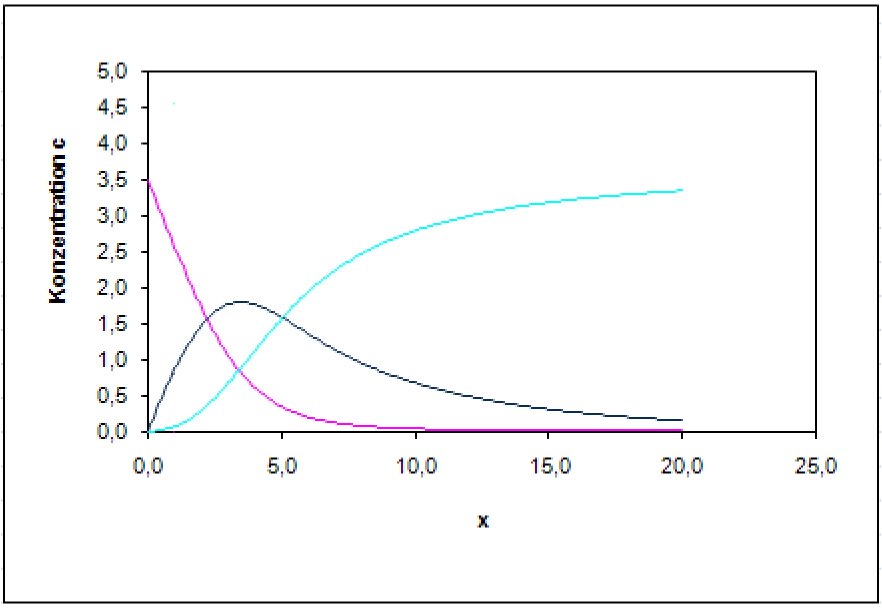
$dz/dt = xy-by$

Darin ist x ein Maß für die Rotationsgeschwindigkeit der Konvektionszellen, y ist proportional zur Temperaturdifferenz zwischen aufsteigender und absteigende Strömung, z beschreibt die Abweichung des vertikalen Temperaturprofils von der Linearität. Die Konstanten δ sind die Prandtl Zahl, R die Re Zahl und b ein geometrischer Faktor. Die Gleichungen sind bereits auf den 1. Grad reduziert.

Quelle: Dr. Robert Doerner, Frankfurt

Chemische Reaktion

Beispiel einer instationären Reaktion in einem Rührkessel für die Folgereaktion A_1 -> A_2 und A_2 -> A_3.



Man erkennt, dass A_1 beginnend mit 3,5 stetig abnimmt, während A_2 beginnend mit 0 zunimmt und nach dem Maximum wieder abnimmt, während A_3 verzögert mit 0 beginnt, um dann stetig zuzunehmen.

Quelle: Prof. Dr. Müller-Erlwein [3]

Dieses Buch ist eine Fundgrube einfacher und komplexer Reaktionen und deren Berechnung mit numerischen Methoden in Basic. Eine Auswahl davon wurde in Excel-VBA Übertragen. Beispiele: Parabolische, hyperbolische, partielle Differentialgleichungen, Rührkesselkaskade, Strömungsrohr mit Axial- und Radialdispersion, Katalysatorpellets, Film- und Porendiffusionsmodell.

Ein ebenfalls sehr interessantes Buch mit Basic-Beispielen ist Ebert, Ederer [2]. Auch dieses Buch ist eine Fundgrube für numerische Lösungen komplexer Differentialgleichungen, in Basic programmiert und z.T. in Excel-VBA übertragen. Beispiele: Partielle Differentialgleichung, instationäre Wärmeleitung, Chromatographiesäule, Harmonischer Oszillator, Schrödinger-Gleichung, Potenzialgleichung, Bewegung von Molekülen.

Die numerische Lösung von Differentialgleichungen 2. Ordnung gelingt auch ohne die Reduktion auf Gleichungen der 1. Ordnung mittels Substitution. Während bei der numerischen Lösung der Differentialgleichung 1. Ordnung eine schrittweise Berechnung der Stammfunktion beginnend mit den Anfangswerten erfolgt, wird bei der numerischen Lösung der Differentialgleichung 2. Ordnung zusätzlich die Differentialgleichung 1. Ordnung schrittweise gelöst, d.h. diese wird in die numerische Lösung einbezogen. Dabei liegt der Ansatz vor, den man zur Lösung der Differentialgleichung 1. Ordnung verwendet hat. Es gilt $y = y_0 + y' * h$, und $y' = y'_0 + y'' h$. Jede Gleichung stellt eine numerische Integration dar. Speziell dafür geeignet ist das Runge-Kutta-(Nyström)-Verfahren [9]. Das bisher beschriebene Euler-Verfahren wäre dafür zu ungenau.

In 3 Excelprogrammen wird dieser Lösungsweg vorgestellt.

Runge-Kutta-Verfahren 4.Ordnung für Differentialgleichung 2.Ordnung

Beispiel: Schwingungen eines harmonischen Federpendels

Lösung: $x(t)=x_o.\sin(w.t - \varphi)$

x(0) =	2	Masse m =	1
v(0) =	0	Dämpfung b =	0
a(0) =	-4,00		
Feder k=	2	Schrittweite h =	0,1

$$y''=f(x;y;y')$$
$$hier: m.x''(t)=-k.x-b.x'(t)$$
$$x''(t)=f(x,x')$$

t	x	v	k1	m1	k2	m2	k3	m3	k4	m4
0,00	2,000	0,000	0,000	-0,400	-0,020	-0,400	-0,020	-0,398	-0,040	-0,396
0,10	1,980	-0,399	-0,040	-0,396	-0,060	-0,392	-0,059	-0,390	-0,079	-0,384
0,20	1,921	-0,789								-0,365
0,30	1,823	-1,164								-0,338
0,40	1,688	-1,516								-0,304
0,50	1,520	-1,837								-0,264
0,60	1,322	-2,122								-0,220
0,70	1,097	-2,365								-0,170
0,80	0,851	-2,560								-0,118
0,90	0,587	-2,704								-0,062
1,00	0,312	-2,794								-0,006
1,10	0,030	-2,828								0,050
1,20	-0,252	-2,806								0,106
1,30	-0,529	-2,728								0,159
1,40	-0,796	-2,595	-0,260	0,159	-0,252	0,185	-0,250	0,184	-0,241	0,209

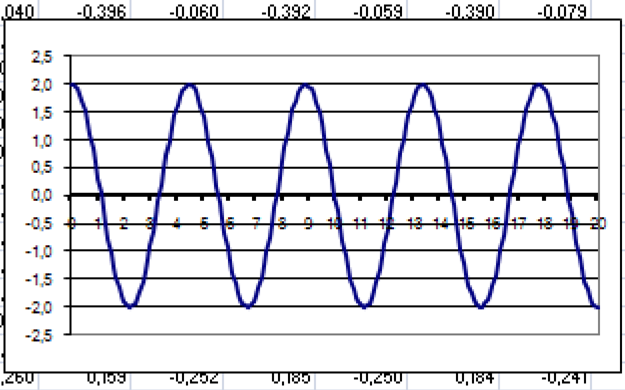


Abb. Excel „RungeKutta.xlsm“, Quelle unbekannt

Punktweise Lösung einer Differentialgleichung 2.Ordnung nach dem Runge-Kutta-Verfahren

alle Hinweise beziehen sich auf

Papula, L. Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler 2

Teil V, Kap 5

Differentialgleichung 2. Ordnung

Gleichung:	y'' = f (y', y, x) =	-6"ystr-8,75"y	Integration	Grafik
Anfangswerte	x_0 =	0	Ausdruck starten	y, y', y''
	y (x_0) =	0	[- ? -]	y
	y' (x_0) =	80		y'
	Schrittweite h =	0,1		y''
	Anzahl der Schritte =	50		

k	x	y	y´	k = h * y´	m = h * f(x;y;y´)
0	0	0	80	8	-48
	0,05	4	56	5,6	-37,1
	0,05	2,8	61,45	6,145	-39,32
	0,1	6,145	40,68	4,068	-29,784875
1	0,1	5,926333333	41,56252083	4,156252083	-30,12305417
	0,15	8,004459375	26,50099375	2,650099375	-22,9044982

Abb. Excel „Runge.xlsm“ Quelle unbekannt

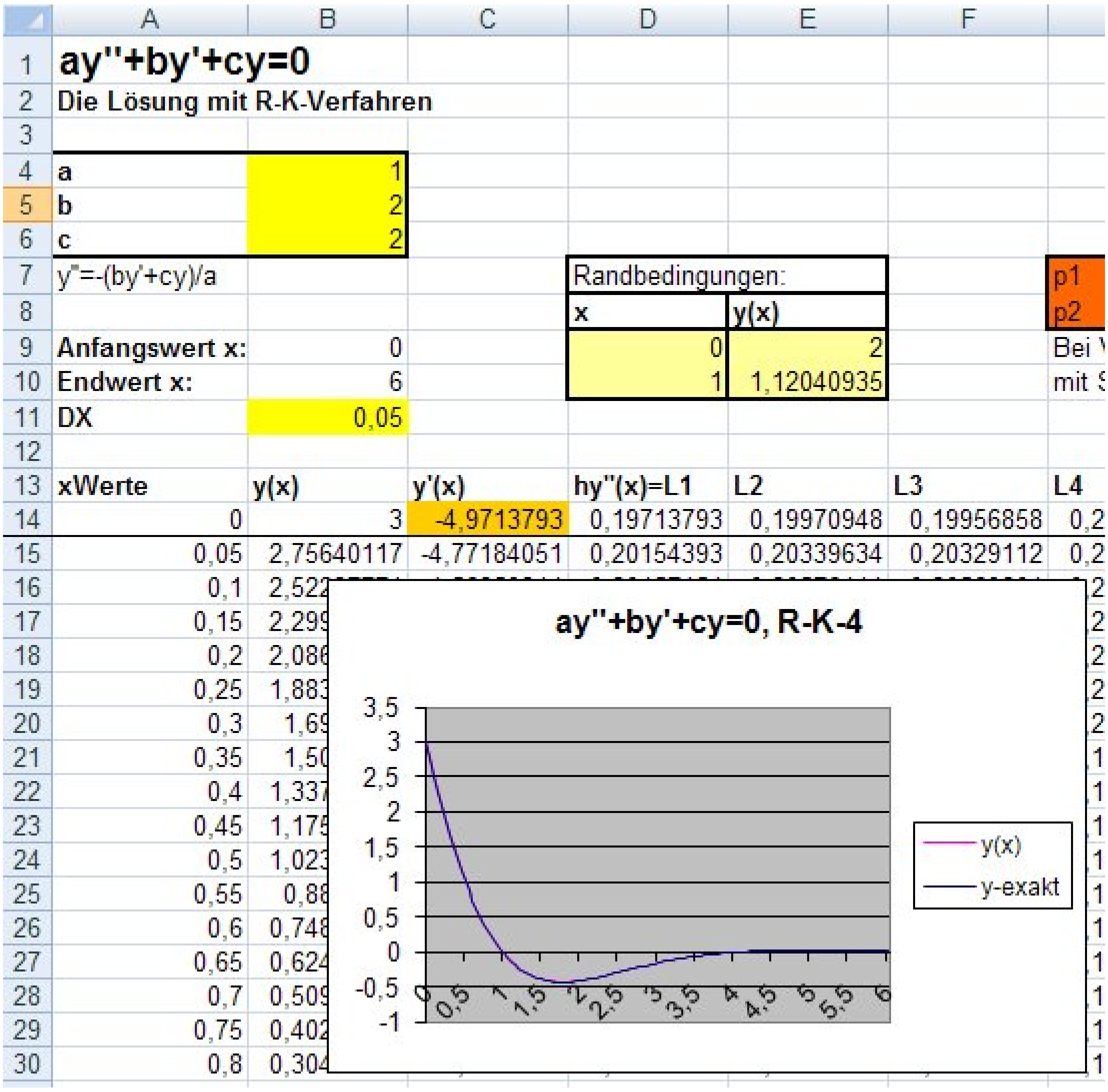


Abb.: Excel DifGl.xlsm Tabelle B2-RK4 aus dem Buch von Mesina „Numerische Mathematik mit Excel“

Bisher wurden nur Differentialgleichungen bis zum 2. Grad behandelt. Auch höhere Ableitungen lassen sich in Differenzengleichungen umwandeln.

Die Substitution von Differentialgleichung 3. Ordnung führt entsprechend zu 3 Gleichungen 1. Ordnung.

Beispiel:

$$y''' + y * y' = 0$$

d.h. $y''' = -y * y'$

Substitution: y1=y, y2=y‘, y3=y‘‘

Ableitungen: y1‘=y‘, y2‘=y“, y3‘ = y“‘

Nun kann man wieder ersetzen: y1‘=y2, y2“=y3.

Eingesetzt: y3‘ = -y1*y2

Weiterhin gilt: y1‘ = y2, y2‘=y3

Es ergeben sich 3 Differentialgleichungen erster Ordnung:

y1'=y2 numerisch: $\Delta y1=y2 * \Delta x$:

y2'=y3 numerisch: $\Delta y2 = y3 * \Delta x$

y3'=-y1*y2 numerisch: $\Delta y3 = -y1 * y2 * \Delta x$

Das sich ergebende Gleichungssystem ist nach demselben Schema wie oben beschrieben Zeile für Zeile zu lösen. Die erste Zeile berechnet aus y2 und Δx den nächsten Schritt für y1. Die zweite Zeile berechnet aus y3 und Δx den nächsten Schritt für y2. Die dritte Zeile berechnet aus y1 und y2 den nächsten Schritt für y3.

Weitere bekannte Beispiele für die numerische Lösung komplexer Differentialgleichungen sind:

Räuber-Beute Modell [12], Epidemieausbreitung, Radioaktiver Zerfall, Schwingkreise, Regelkreise, schiefer Wurf mit Reibung, Umlaufbahnen von Kometen, Planeten und Satelliten, Meteorologische Simulation, Klimasimulation, Molekülsimulation, Finite Elemente, CFD-Rührersimulation, Strömungssimulation.

Ich bin Ihnen für Hinweise sehr dankbar.

Literatur:

1. Schnauder: Ingenieurmathematik
2. Ebert, Ederer: Computeranwendungen in der Chemie
3. Müller-Erlwein: Computeranwendungen in der Chemischen Reaktionstechnik
4. Stiefel: Einführung in die Numerische Mathematik, 1993, Teubner
5. Schwarz: Numerische Mathematik, S.412 ff, 1997, Teubner
6. Papula: Mathematik für Ingenieure und Wissenschaftler, Band 2, 2009, Vieweg + Teubner
7. Mesina: Numerische Mathematik mit Excel, 2001, Franzis
8. Bronstein: Taschenbuch der Mathematik, 2008, Verlag Harry Deutsch
9. Arens: Mathematik, Spektrum
10. Zurmühl: Praktische Mathematik, S. 380 ff, 1965, Springer
11. Engel-Müllges: Numerik-Algorithmen, 1996, VDI-Verlag
12. Fleischhauer: Excel in Naturwissenschaft und Technik

Autor: Wolfgang Schmidt

Mai 2013

E-Mail: ws@chemievt.de - www.chemievt.de -