Lichtgeschwindigkeit

Die Lichtgeschwindigkeit beträgt konstant ca. 300 000 km/s = $3*10^8$ m/s. Für unsere Betrachtung genügt diese Genauigkeit. Nichts kann schneller als die Lichtgeschwindigkeit sein. Der Begriff Lichtgeschwindigkeit ist in sofern irreführend, da nicht nur das Licht, sondern auch Magnet- und Elektrofelder sowie die Gravitation sich mit der Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Genauer wäre offensichtlich die Aussage, dass die Zeit sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet.

Würde die Sonne in einem Augenblick verschwinden, würde die Erde noch 8 min um diese kreisen und dann geradeaus fliegen. Da unsere Galaxie (Milchstraße) einen Radius ca. 50 000 Lichtjahre hat, dauert es ebenso lange bis die Gravitation des Milchstraßenzentrums bis an den Rand der Milchstraße, etwa da, wo unser Sonnensystem ist, gelangt.

Kann man trotzdem schneller als die Lichtgeschwindigkeit sein? Man kann. Es kommt auf die Betrachtung an.

In einer Rakete, welche permanent mit a = 10 m/s² beschleunigt, erreichen wir nach

$$t = \frac{v}{a}$$

$$t = \frac{6 \cdot 10^8}{10} = 6 \cdot 10^7 s$$

die doppelte Lichtgeschwindigkeit. Natürlich nehmen wir uns genug Verpflegung für diese lange Zeit mit. Zum Beweis haben wir in dem Raumschiff ein Tachometer eingebaut. Der misst die Beschleunigung und multipliziert sie mit der Zeit. Nach 1s zeigt der Tacho v = 10 m/s, nach 1000 s zeigt der Tacho v = 10000 m/s. Und nach $6*10^7$ s zeigt der Tacho eine Geschwindigkeit von 600 000 km/s = $6*10^8$ m/s an. Dies ist laut Tacho die doppelte Lichtgeschwindigkeit. Mit dieser Geschwindigkeit fliegen wir nun dicht an der Erde vorbei Richtung Mond. Der ist von der Erde 388 000 km entfernt. Durch Peilung messen wir genau, wann wir 88 000 km vor dem Mond, d.h. 300 000 km von der Erde entfernt sind. Dies ist genau die Strecke, für die das Licht 1 s benötigt.

Wenn wir dicht genug an der Erde vorbei fliegen, lassen wir einen hellen Blitz erleuchten, der auf der Erde ohne Verzögerung gesehen wird. Sowohl wir, als auch die Beobachter auf der Erde drücken in diesem Moment auf Stoppuhren. Wenn wir an der Marke „300 000 km von der Erde entfernt" sind, lösen wir erneut einen Blitz Richtung Erde aus und drücken die Stoppuhr zum 2. Mal. Diese zeigt 0,5 s an. Wir haben also die Strecke 300 000 km in einer halben Sekunde zurückgelegt. Für uns in der Rakete ist das Beweis genug, dass wir doppelte Lichtgeschwindigkeit geflogen sind. Wenn der zweite Blitz auf der Erde gesehen wird, drückt man auch dort die Stoppuhr und liest die Zeit ab. Es sind 2,118034 s.

Wie ist das möglich? Für die Erde gelten andere Zeitregeln als für uns. Die Zeiten auf der Erde zwischen den beiden Blitzen und unsere Zeiten berechnen sich nach der Relativitätstheorie wie folgt.

$$t_E^2 = t_C^2 + t_R^2$$

Darin ist t_E die Zeit auf der Erde, t_C die Zeit des Lichtes und t_R die Zeit im Raumschiff für die 300 000 km. Es gilt t_C = 1 s, t_R = 0,5 s , also die Zeit wie sie in der Rakete wahrgenommen wird. Eingesetzt in die Gleichung erhalten wir t_E = 1,118034 s. Das wäre die Raumschiffzeit aus der Sicht der Erde. Dazu addieren wir die Zeit des Lichtes = 1 s. Dies ist die Zeit, die der zweite Blitz brauchte, um zur Erde zu gelangen und erhalten die Zeit der irdischen Stoppuhr t_{ES} = 2,118034 s. Und wie schnell war unsere Rakete aus der Sicht der Erde?

Dazu nehmen wir die auf die Erde bezogene Raumschiffzeit t_E = 1,118034 s für die Strecke von 300 000 km (2,118034 s -1 s für die Zeit des Blitzes zurück). Daraus berechnen wir die Geschwindigkeit

$$v_R = \frac{s}{t_R} = \frac{3 \cdot 10^8}{1{,}118034} = 2{,}6833 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Das sind 89% der Lichtgeschwindigkeit, also nicht die doppelte Lichtgeschwindigkeit wie man sie in der Rakete wahrgenommen hat. Wer hat nun Recht? Beide. Die Zeiten sind unterschiedlich, nämlich 1,118 – 0,5 = 0,618 s. Um diese Zeitdifferenz würden die Uhren in der Rakete im Vergleich zu den Uhren auf der Erde anders laufen. Wenn die Rakete wieder auf der Erde landet, wird man das feststellen. Dass die Zeiten relativ sind, ist die Kernaussage der Relativitätstheorie.

In diesem Beispiel war die Geschwindigkeit für die Rakete sehr hoch gewählt, um die Wirkung deutlich zu machen und man muss $6*10^7$ s lang fliegen, um die (lokale) doppelte Lichtgeschwindigkeit zu erreichen. Das sind immerhin fast 2 Jahre. Weitere 2 Jahre bräuchte die Rakete für das Bremsmanöver, um wieder auf die Erde zurückzukehren. Wie man diesen Flug tatsächlich steuert, ist unklar, aber er dient uns als Experiment, um die Relativitätstheorie an einem Beispiel zu erklären.

Diese Relativitätstheorie wurde von Einstein entwickelt, um die Relativität der Zeit abzuleiten unter der Berücksichtigung, dass die Lichtgeschwindigkeit eine Konstante ist. Bei der Ableitung vergleicht man lediglich zwei Koordinatensysteme. Dabei ergibt sich die o.g. Zeitbeziehung. Wenn man diese auf die Geschwindigkeit anwendet, erhält man aus dieser (pythagoreischen) Zeitbeziehung

$$t_E^2 = t_C^2 + t_R^2$$

durch Einsetzen von

$$t = \frac{s}{v}$$

und mit s = 1, d.h. Kürzen durch s^2 und mit v_c = c, der Lichtgeschwindigkeit

$$\frac{1}{v_E^2} = \frac{1}{v_R^2} + \frac{1}{c^2}$$

Aufgelöst nach v_E erhalten wir

$$v_E^2 = \frac{1}{\frac{1}{v_R^2} + \frac{1}{c^2}} = \frac{v_R^2}{1 + \frac{v_R^2}{c^2}}$$

$$v_E = v_R \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{v_R^2}{c^2}}}$$

Diese Formel ist bekannt. Setzen wir darin die o.g. Werte für $v_R = 6*10^8$ m/s ein, erhalten wir tatsächlich die auf die Erde bezogene Geschwindigkeit der Rakete mit $v_E = 2{,}6833 *10^8$ m/s.

Eine analoge Beziehung besteht zwischen der Ruhemasse auf der Erde m_E und der Masse m_R in der Rakete.

$$m_E = m_R \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{v_R^2}{c^2}}}$$

Danach würde 1 kg Ruhemasse m_E in der Rakete die Masse $m_R =$ 2,236 kg haben.

Von dem amerikanischen Astronom Hubble wissen wir, dass er die Rotverschiebung von Galaxien entdeckte und daraus die permanente Ausdehnung des Weltalls begründete. Er fand heraus, dass die Rotverschiebung umso größer ist, je weiter die Galaxie entfernt ist. Daraus schloss er, dass die Galaxien sich umso schneller von uns entfernen, je weiter sie entfernt sind und begründete daraus die Urknalltheorie, wonach das Weltall endlich ist. Die Beobachtung der Rotverschiebung lässt den Schluss zu, dass die Erde im Zentrum der Weltallausdehnung liegt. Eine mathematische Ableitung dazu ist nicht bekannt.

Eine andere Betrachtung ergibt folgendes: Das Licht einer Galaxie, welches zu uns kommt, ist umso älter, je weiter die Galaxie von uns entfernt ist. Je länger das Licht zu uns unterwegs ist, umso länger unterliegt es dem Einfluss der Gravitation im Weltall. Das Weltall ist voll von Galaxien (insgesamt 100 Milliarden). Dass die Gravitation Einfluss auf Licht hat, hat Einstein aus der Maxwell-Gleichung abgeleitet und lässt sich durch das Modell des Lichtes als Photon berechnen. Das Photon wird aber durch die Gravitation nicht langsamer, dessen Ablenkung an der Sonne jedoch berechnet und nachgewiesen. Die Berechnung ist sehr komplex. Es ist zu vermuten, dass, wenn diese auf das Licht der entfernten Galaxien angewandt wird, sich damit die Rotverschiebung erklären lässt.

Vielleicht kommt Einstein nochmal kurz zurück auf die Erde und berechnet das. Seiner Aussage nach gilt:

„Die Dummheit der Menschen und das Weltall sind unendlich. Bei letzterem bin ich mir nicht so sicher." Er war sich dessen sogar sehr sicher. Er wollte damit sagen, so unendlich das Weltall ist, umso mehr grenzenlos ist das Unwissen der Menschen.

Ist die Lichtgeschwindigkeit berechenbar? Ja, über das Gesetz des Elektromagnetismus.

Die magnetische Feldkonstante $\mu_0 = 4\ \pi\ 10^{-7} \ldots [\frac{N}{A^2}]$

Die Dielektrizitätskonstante ε_0 = 8,854 10^{-12} $[\frac{As}{Vm}]$

Nach Maxwell (James Clerk Maxwell) gilt $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$

Daraus errechnet sich c = 2,99796 10^8 m/s

Relativgeschwindigkeiten:

Ein Fahrzeug habe die Länge s_0 = 100 m und die Geschwindigkeit v_0 = 10 m/s. Am Heck wird ein Schall erzeugt, der am Bug gemessen werden soll. Die Schallgeschwindigkeit beträgt c = 333 m/s. Nach welcher Zeit kommt der Schall am Bug an?

$$t = \frac{s_0}{c - v_0} = \frac{100}{333 - 10} = 0{,}31\ s$$

Wird der Schall am Bug erzeugt und am Heck empfangen lautet die Gleichung

$$t = \frac{s_0}{c - v_0} = \frac{100}{333 + 10} = 0{,}29\ s$$

Herleitung: Es sei s_0 die Strecke (100 m), die der Empfänger von der Schallquelle zum Zeitpunkt t = 0 entfernt sei. v_0 sei die Geschwindigkeit des Empfängers (100 m/s), t_0 sei die Zeit, die das Fahrzeug für die Strecke s_0 benötigt, c die Schallgeschwindigkeit (333 m/s), s ist die Strecke, die der Schall in der Zeit t zurücklegt:

$$s = ct$$

Dieselbe Strecke s legt der Empfänger zurück, allerdings mit s_0 = 100 m Vorsprung. Daher gilt

$$s = s_0 + v_0 t$$

Durch Gleichsetzen und erhalten wir

$$ct = s_0 + v_0 t$$

Aufgelöst nach t erhalten wir

$$t = \frac{s_0}{c - v_0}$$

Nun dividieren wir durch c und erhalten

$$t = \frac{t_0}{1 - \frac{v_0}{c}}$$

Es kommt nicht darauf an wie schnell die Schallquelle ist, sondern wie schnell der Empfänger ist. Auch wenn sich die Schallquelle während der Erzeugung des Schalls bewegt, verbreitet sich die Schallwelle von dem Ort aus, an dem die Schallquelle zur Zeit der Schallerzeugung war. Dem Schall ist es egal wohin die Schallquelle nach Erzeugung des Schalls fährt. Die Beobachtung bestätigt dies.

In einem fahrenden Auto ruht das Schallmedium im Auto. Die Schallausbreitung verläuft also von der Schallquelle aus und hat in Bezug auf die Erde die Bezugsgeschwindigkeit des fahrenden Autos. Das Zentrum der Schallwellen ist für den Autofahrer mit dem beweglichen Zentrum der Schallquelle identisch, nicht jedoch für einen Beobachter außerhalb des Autos. Würde man im Auto die Schallgeschwindigkeit messen ergäbe sich 333 m/s, egal wie schnell das Auto wäre.

Beispiel: In einer Stadt fahren 1000 Autos kreuz und quer. Die Übertragung des Schalls von einer Schallquelle des einen Autos auf ein anderes Auto und dessen Insassen läßt sich linear berechnen.

Die Lichtausbreitung im All verhält sich wie folgt. Da Licht kein Medium benötigt, erfolgt die Lichtausbreitung von der Lichtquelle so wie die Schallausbreitung im fahrenden Auto. Das Zentrum der Lichtwellen ist mit dem beweglichen Zentrum der Lichtquelle identisch. Mit anderen Worten: jede Lichtquelle wird ruhend betrachtet, selbst wenn sie sich bewegt. Die Frage ob sich jemand bewegt oder ruht ist im All nicht absolut sondern nur relativ definierbar.

Beispiel: Zwei Raumschiffe sind soweit von einander entfernt, dass sie sich weder sehen noch sonst wie Kontakt haben und bewegen sich aufeinander zu. Jeder sendet Lichtsignale aus und misst die Lichtgeschwindigkeit in seinem Raumschiff. Jeder erhält das bekannte Ergebnis: 300000 km/s. Jeder kann sich also ruhend betrachten. Für jeden Raumfahrer breitet sich das Licht ganz normal kugelförmig aus. Obwohl sich jedes Raumschiff mit Fug und Recht als ruhend bezeichnen darf, haben sie eine Relativgeschwindigkeit zueinander. Und nur die zählt, denn eine absolute Geschwindigkeit gibt es nicht im All und damit auch keine Schilder mit einer Geschwindigkeitsbegrenzung. Wann aber erreicht nun das Licht des einen Raumfahrers den anderen Raumfahrer? Das können wir nicht wie bei den Autos in einer Stadt linear berechnen. Dazu ist die sog. Lorentz-Transformation nötig. Dabei wird jeder Raumfahrer so betrachtet, dass für ihn ein Koordinatensystem gilt, dessen Koordinaten auf die Koordinaten eines anderen Raumfahrers transformiert werden müssen.

Die Verbindungskoordinate der beiden Raumschiffe sei x. Die Koordinaten und Zeiten im Raumschiff 1 sind x und t und die im Raumschiff 2 x‘ und t‘. Raumschiff 2 bewege sich relativ zum Raumschiff 1 mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung.

Zum Startzeitpunkt 0 gilt $t = t' = 0$ und $x = x' = 0$ sowie $y = y' = 0$. D.h. es fallen die Koordinatenursprünge zum Zeitpunkt $t = 0$ zusammen. Für Raumschiff 1 bewegt sich Raumschiff in positiver Richtung und für Raumschiff 2 bewegt sich Raumschiff 1 in negativer Richtung fort. Daher gilt

$$x = f(x' + vt')$$

bzw.

$$x' = f(x - vt)$$

Dies ist die Galilei-Transformation. Darin sind t und t‘ die Zeiten sowie f der Transformationsfaktor.

Für herkömmliche langsame Bewegungen, d.h. $v \ll c$, würde $f = 1$ und $t = t'$ sein.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ senden beide Raumschiffe ein Lichtsignal aus. Die Lichtgeschwindigkeit beträgt in beiden Raumschiffen = c. Damit gilt für die Strecke x im Raumschiff 1

$x = ct$

und für Raumschiff 2

$x' = ct'$.

Nun brauchen wir nur diese 4 Gleichungen zusammenzufassen und erhalten:

$ct = f(x' + vt') = f(ct' + vt') = ft'(c + v)$

sowie

$ct' = f\ (x – vt) = f(ct – vt) = (ft\ (c –v)$

Wir multiplizieren beide Gleichungen miteinander und erhalten

$c^2tt' = f^2(c + v)(c – v) = f^2(c^2 - v^2)$

Durch tt' dividiert erhalten wir

$$f^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

und letztlich

$$f = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Dies ist die Lorentz-Transformation mit f dem Lorentzfaktor. Dieses Ergebnis stimmt mit den o.g. Zeittransformationen überein.

Hendrik Antoon Lorentz (1853 – 1928) war ein niederländischer Mathematiker und Physiker. Auf seinen mathematischen Grundlagen konnte Albert Einstein 1905 seine spezielle Relativitätstheorie aufbauen.

Die nächste Galaxie, der Andromeda Nebel ist $2,5*10^6$ Lichtjahre von uns entfernt und hat einen Durchmesser von 140000 Lichtjahre.

Sie ist also gerade mal 20 mal so weit von uns entfernt wie ihr Durchmesser beträgt, befindet sich also direkt vor unser Haustür und bewegt sich auf uns zu. Am Himmel und im Planetarium erscheint ihr Durchmesser im Winkel von erstaunlicherweise 186,2‘. Die Sonne und der Mond erscheinen im Winkel von nur 32‘.

Wolfgang Schmidt
November 2014