Kreisfläche durch Integration herleiten

Von einem Kreis, dessen Mittelpunkt sich im Ursprung des kartesischen Koordinatensystems, d.h. bei x = 0 und y = 0 befindet und dessen Radius r ist, soll die Fläche hergeleitet werden.

Nach Pythagoras bilden wir x und y aus r mit r = konstant.

Es gilt

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

d.h.

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Die viertel Kreisfläche berechnet sich aus der Summe aller Flächenelemente

dA = ydx

Das Integral lautet dann durch Einsetzen von y für den ganzen Kreis

$$A = 4\int_{0}^{x=r} ydx = x = 4\int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx$$

Die Lösung dieses Integrals lautet allgemein

$$A = 4 \Big|_{x=0}^{x=r} \left(\frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2} + \frac{r^2}{2} arc\ \sin\frac{x}{r}\right)$$

Setzt man die Grenzen x = r und x = 0 ein und bildet die Differenz, erhält man mit arc sin(1) = π/2 die viertel Fläche

$$A = 4\frac{r^2}{2}\frac{\pi}{2}$$

die volle Kreisfläche gilt also

$$A = r^2\pi$$

Betrachtet man einen Kreisabschnitt des Winkels dφ so gilt für den dazugehörigen Umfang dU

$$dU = rd\varphi$$

Die Fläche dA besteht aus einem Dreieck und berechnet sich zu

$$dA = \frac{r}{2} dU$$

dU eingesetzt ergibt

$$dA = \frac{r^2}{2} d\varphi$$

Das Integral über den vollen Kreis, d.h. 2π liefert

$$A = \frac{r^2}{2} \int_{o}^{2\pi} d\varphi$$

Das Integral lautet

$$A = \frac{r^2}{2} [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{r^2}{2} 2\pi$$

Daraus folgt

$$A = r^2 \pi$$

Diese Herleitung ist natürlich viel einfacher als die vorherige. Die nachstehende ist wieder etwas schwieriger.

Man ersetzt y durch die Winkelfunktion

$$y = r \sin \varphi$$

$$x = r \cos \varphi$$

Daraus erhält man

$$dx = -r \sin \varphi \, d\varphi$$

Dann lautet das Integral mit r = konstant für den Viertelkreis

$$A = r \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \sin \varphi dx$$

Darin wird dx durch dφ ersetzt

$$A = -r^2 \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \sin^2 \varphi \, d\varphi$$

setzen wir x = φ lautet das Integral

$$A = \frac{r^2}{2} [\varphi - \sin \varphi \cos \varphi]_0^{2\pi}$$

und erhalten mit sin (2π)cos(2π) = 0

$$A = r^2 \pi$$

Eine weitere Herleitung benutzt wie die o.g. Gleichung

$$A = \int_0^{x=r} y dx = x = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$$

Ersetzt man

$$x = r \sin \varphi$$

und

$$dx = r \cos \varphi d\varphi$$

erhält man

$$A = 4 \frac{r}{2} [\sin \varphi \cos \varphi + \varphi]_0^{\pi/2} = r^2 \pi$$

Anm.: Kugelberechnungen folgen

Autor: Wolfgang Schmidt, 2/2016