Die Euler Methode zur Lösung von Differenzialgleichungen und ihre Erweiterungen

Die allgemeine Form einer Differenzialgleichung lautet

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Diese Funktion ist die Steigung einer unbekannten Stammfunktion.

Lautet die Form

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

handelt es sich nicht um eine Differenzialgleichung, sondern um eine Integration

$$y = \int f(x)dx$$

welche analytisch oder numerisch zu lösen ist.

Wir wählen als Beispiel

$$f(x, y) = xy$$

Damit lautet die Differenzialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

Dieses Beispiel ist dem Buch Computeranwendungen in der Chemie [1] entnommen. Die analytische Lösung lautet

$$y = Ae^{\frac{x^2}{2}}$$

Sie entsteht durch Trennung der Variablen

$$\int_1^y \frac{dy}{y} = \int_0^x xdx$$

Die Integration liefert

$$lny = \frac{1}{2}x^2$$

Es ist y für x = 0,1 gesucht. Die exakte Lösung lautet y = 1,0050125. Das soll numerisch mit der Euler-Cauchy Methode berechnet werden. Aus der Differenzialgleichung erstellen wir eine Differenzengleichung, indem wir setzen

$$y_{i+1} - y_i = \Delta y = dy$$

Darin ist i eine ganzzahlige Schrittzahl von 0 bis n. Durch Einsetzen der Funktion erhalten wir mit Δx = dx

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)\Delta x$$

Die Gleichung besagt, dass aus einem bekannten y_i mit Hilfe der Differenzialgleichung f(x,y), mit y = y_i und x = x_i das Ergebnis y_{i+1} berechnet wird.

Setzen wir die Gleichung aus dem Beispiel mit h = Δx als Schrittweite ein erhalten wir

$$y_{i+1} = y_i + x_i y_i h$$

Wir wählen als Startwert für i = 0

$x_0 = 0$

$y_0 = 1$

Als Schrittweite wählen wir h = Δx = 0,1.

Setzen wir die Zahlen ein erhalten wir für x = 0,1

$$y_1 = y_0 + x_0 y_0 h$$

Also

$$y_1 = 1 + 0 * 1 * 0{,}1$$

Ergebnis: $y_1 = 1{,}0$

Analytisch erhalten wir $y_1 = 1{,}00501$

Für x gilt

$$x_{i+1} = x_i + h$$

Also mit $x_0 = 0$

$$x_1 = 0 + 0{,}1$$

Ergebnis

$x_1 = 0{,}1$

Der zweite Schritt lautet mit i = 1 und $x_2 = x_1 + 0{,}1 = 0{,}2$

$$y_2 = y_1 + x_1 y_1 h$$

Setzen wir die Werte ein, erhalten wir

$$y_2 = 1 + 0{,}1 * 1 * 0{,}1$$

Ergebnis: $y_2 = 1{,}001$

Die analytische Lösung lautet mit $x_2 = 0{,}2$: $y_2 = 1{,}01005$

Die Übereinstimmung mit den errechneten Werten ist nicht gut genug.

Würden wir auf diese Weise fortfahren bis z.B. x = 1 erhalten wir nach 512 Schritten bei h = 1/512 als Ergebnis y = **1,64**657. Das berechnete Ergebnis lautet y = 1,64872127. Lediglich die ersten 3 Ziffern stimmen exakt mit dem analytischen Ergebnis überein. Der Grund der Abweichung liegt in der linearen Extrapolation vom Startwert ausgehend. Nach doppelt so vielen Schritten also 1024, d.h. h = 1/1024 wird das Ergebnis auch nicht besser, nämlich y = **1,64**764877. D.h. eine Verdopplung der Schritte allein ist nicht die Lösung.

Als nächstes betrachten wir die verbesserte Euler-Cauchy Methode, in [1] prediktive Euler-Cauchy Methode genannt. Diese Methode benötigt zwar doppelt so viele Schritte wie die einfache Euler Cauchy Methode, ist aber erheblich effektiver als die Verdopplung der Schritte bei der einfachen Euer-Cauchy Methode.

Wir hatten im Beispiel für y_{i+1} also $y_1 = 1$ bei x = 0,1 erhalten. Berechnen wir damit die Funktion f(x,y) = xy, erhalten wir aus der Gleichung

$$y^*_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

denselben Wert für y_1, hier y^*_{i+1} genannt, den wir zuvor als Ergebnis für x_1 erhalten haben. Als Ergebnis erhalten wir wie bekannt

$$y^*_1 = y_0 + y_0 x_0 = 1 + 0 * 1 * 0{,}1 = 1{,}0$$

Die Gleichung der prediktiven Euler-Cauchy Methode lautet

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f\left(x_{i,}y_i\right) + f\left(x_{i+1,}y^*_{i+1}\right)\right)$$

Setzen wir die Funktion ein erhalten wir

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(x_0 y_0 + x_1 y^*)$$

Ergebnis: y_1 = 1 + 0,05 (0 + 0,1*1,0) = 1,005.

Berechnen wir mit der prediktiven Euler-Cauchy Methode (2 Stützstellen pro Schritt) y für x = 1 so erhalten wir nach 512 Schritten, d.h. 1024 Rechenschritten y = **1,6487521**1. Dieses Ergebnis stimmt immerhin in den ersten 7 Dezimalstellen mit dem berechneten Ergebnis (y = 1,64872127) überein. Mit der Runge-Kutta Methode (4 Stützstellen pro Schritt) erreicht man immerhin schon nach 8 Schritten, d.h. 32 Rechenschritten das Ergebnis y = 1,64872061, welche aufgerundet eine Übereinstimmung in 7 Dezimalstellen ergibt.

Der Fehler der prediktiven Euler-Cauchy Methode wird in [1] als vom 3. Grad und bei Runge Kutta als vom 4. Grad angegeben. Der Fehler bei der einfachen Euler-Cauchy Methode ist vom 1. Grad. Der in der Literatur oft zitierte Verlet Algorithmus [3] verwendet die Taylor Reihe, um damit die zu lösenden Funktion zu approximieren.

Der Fehler, der beim numerischen Lösen einer Differenzialgleichung gemacht wird, kann sich akkumulieren und dadurch zu unsinnigen Ergebnissen führen.

Die nachstehend beschriebene Methode lässt sich anwenden, wenn die Integration über x möglich ist. Gehen wir wieder von dem bereits gewählten Beispiel aus

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

und setzen darin y als Konstante ein, dann erhalten wir

$$dy = y_i \int_0^x x dx$$

Mit $y_{i+1} – y_i = \Delta y = dy$ erhalten wir wenn $y = y_i$ dem Anfangswert gleich gesetzt wird

$$y_{i+1} = y_i + y_i \frac{1}{2} x^2$$

Mit $y_i = 1$, $x_1 = 0$ und $x = 0{,}1$, der Schrittweite erhalten wir dann die numerische Gleichung

$$y_{i+1} = 1 + \ 1\frac{1}{2} 0{,}1^2$$

Ergebnis: $y_{i+1} = 1{,}005$.

Dieses Ergebnis mit nur einer Stützstelle ist identisch mit dem Ergebnis der prediktiven Euler-Cauchy Methode (zwei Stützstellen), aber kleiner als das berechnete Ergebnis (1,00501). Wir haben unterstellt, dass y zwischen x = 0 und x = 0,1 konstant = 1 ist.

Nun können wir $y = y_{i+1,\,alt}$ setzen und erhalten

$$y_{i+1,neu} = y_i + y_{i+1,alt} \frac{1}{2} x^2$$

$$y_{i+1,neu} = 1 + \ 1{,}005 \frac{1}{2} 0{,}1^2$$

Ergebnis: $y_{i+1,neu} = 1{,}005025$. Dieses Ergebnis ist bis auf 5 Stellen mit dem analytisch berechneten Ergebnis y = 1,005012521 identisch, aber zu groß. Wir haben nämlich erneut unterstellt, dass dieses $y_{i+1,\,alt}$ zwischen x = 0 und x = 0,1 konstant ist. Daher ist $y_{i+1,neu}$ größer als der berechnete y Wert (1,005012521). Es liegt nahe, aus beiden Ergebissen einen Mittelwert zu bilden. Damit erhalten als Ergebnis y = 1,0050125.

Dieses Ergebnis ist bis auf sämtliche 8 Stellen mit dem berechneten Ergebnis identisch. Die Genauigkeit des Ergebnisses überrascht, weil nur zwei Stützstellen verwendet wurden. Damit ist dieses Ergebnis besser als das aus der prediktiven Euler-Cauchy.

Diese vom Autor vermutlich erstmalig beschriebene Methode ist nur anwendbar, wenn über x integriert werden kann. Dies kann sowohl analytisch als auch numerisch, d.h. mit der Simpson-Methode geschehen.

Einen Vergleich verschiedener Lösungsmethoden findet man in [3].

W. Schmidt

Dez. 2016

Literatur:

[1] Ebert, Ederer: Computeranwendungen in der Chemie, VCH 1985

[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Verlet-Algorithmus

[3] http://www.mathematik.uni-stuttgart.de/studium/infomat/Numerische-Mathematik-II-SS11/Matlab/V2.pdf