Füllstand eines Behälters

Der Behälter ist eines der häufigsten Apparate in der chemischen Industrie zur Aufbewahrung von Flüssigkeiten. Dabei ist die Kenntnis das Gesamtvolumens als auch des Füllvolumens von entscheidender Bedeutung. Wichtig ist dabei der Zusammenhang zwischen Füllvolumen und Füllhöhe. Die Füllhöhe lässt sich leicht messen, während sich das Füllvolumen in der Regel nicht messen lässt.

Wie betrachten Kugelbehälter und Behälter mit zylindrischem Teil und elliptischen Böden.

Volumen einer Kugel:

$$V = \frac{4}{3} r^3 \pi$$

Ableitung des Füllvolumens eines Kugelbehälters mit der Füllhöhe h.

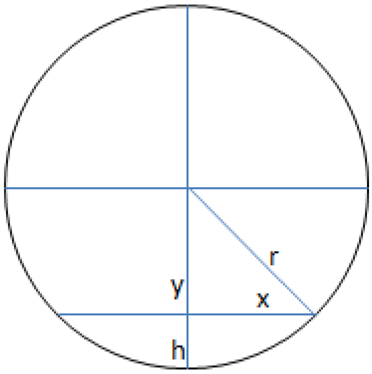

Abb. 1 Skizze der Kugel

Darin ist r = Kugelradius, h die Füllhöhe, x der Radius des Flüssigkeitsspiegels, y = r – h.

Die Oberfläche des Flüssigkeitsspiegels mit Füllstand = h:

$$A = \pi x^2$$

Für eine Schichtdicke dy ergibt sich dann das Schichtvolumen dV

$$dV = \pi x^2 dy$$

Der Zusammenhang zwischen y und x lautet

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Nach x^2 aufgelöst und eingesetzt ergibt:

$$dV = \pi (r^2 - y^2) dy$$

Somit erhalten wir das Integral

$$V = \pi \int_{r-h}^{r} r^2 dy - \pi \int_{r-h}^{r} y^2 \, dy$$

Ergebnis der Integration:

$$V = \pi\left(hr^2 - \frac{1}{3}(r^3 - (r-h)^3)\right)$$

Setzen wir zur Probe h = r, erhalten wir das halbe Kugelvolumen:

$$V = \frac{2}{3}r^3\pi$$

Volumen des vertikalen d.h. senkrechten Zylinders:

$$V = r^2\pi h$$

mit h = Füllhöhe, r = Zylinderradius

Volumen des horizontalen d.h. waagerechten Zylinders:

Methode 1: Für den bis zur Höhe h gefüllten Zylinder der Länge l gilt

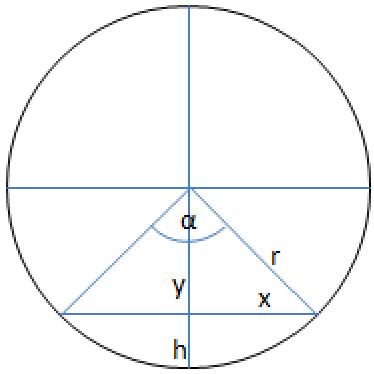

Abb. 2 Skizze des teilweise gefüllten Zylinders

Darin h die Füllhöhe, r der Zylinderradius, x die halbe Breite des Flüssigspiegels. Es gilt r = y + h.

Für die Fläche des Flüssigspiegels gilt

$$A = 2xl$$

Mit l der Zylinderlänge. Für eine Schichtdicke dy gilt das Volumen dy

$$dV = 2xldy$$

Für die Beziehung zwischen x und y gilt

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Nach x aufgelöst und eingesetzt erhalten wir

$$dV = 2l\sqrt{r^2 - y^2}dy$$

mit y = r – h erhalten wir das Integral

$$V = 2l \int_{r-h}^{r} \sqrt{r^2 - y^2}dy$$

Ergebnis der Integration in den Grenzen y = r und y = r - h:

$$V = l\left(y\sqrt{r^2 - y^2} + y^2 arcsin\frac{y}{r}\right)_{r-h}^{r}$$

Nach Einsetzen der oberen Grenze y = r und der unteren Grenze y = r - h lautet das Ergebnis:

$$V = l\left(r^2\frac{\pi}{2} - (r-h)\sqrt{r^2-(r-h)^2} - (r-h)^2 arcsin\frac{r-h}{r}\right)$$

Setzen wir zur Probe h = r, erhalten wir

$$V = \frac{\pi l r^2}{2}$$

Dies ist das halbe Zylindervolumen.

Methode 2:

Mit der Gleichung Flüssigvolumen V = Ausschnittvolumen V_A – Dreieckvolumen V_D erhalten wir das Füllvolumen. Gemäß Abb. 2 ist r der Radius des Zylinders, h die Füllhöhe, x die halbe Breite des Flüssigspiegels, y = r – h. Alpha ist der Winkel des Flüssigspiegels mit dem Zylindermittelpunkt.

Das Ausschnittvolumen V_A berechnet sich als Teil des Kreises:

$$V_A = lr^2 \frac{\pi\alpha}{360}$$

Darin ist α der Winkel des Kreisausschnitts in Winkelmaß.

Im Bogenmaß gilt

$$V_A = lr^2 \frac{\hat{\alpha}}{2}$$

Das Bogenmaß 2π entspricht 360° Winkelmaß.

Für die weiteren Berechnungen gilt das Bogenmaß. Wir wollen den Winkel durch y ersetzen.

Für den Winkel gilt:

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{y}{r}$$

Daraus erhalten wir:

$$\frac{\alpha}{2} = \arccos\left(\frac{y}{r}\right)$$

Damit ergibt sich das Ausschnittvolumen V_A:

$$V_A = lr^2 arccos\left(\frac{y}{r}\right)$$

Für das Dreiecksvolumen V_D gilt

$$V_D = lyx$$

yx ist die doppelte Fläche eines der rechtwinkligen Dreiecke. Darin ist x die halbe Breite des Flüssigstandes h. Es gilt

$$x = \sqrt{r^2 - y^2}$$

damit erhalten wir

$$V_D = ly\sqrt{r^2 - y^2}$$

Damit erhalten wir insgesamt das Füllvolumen V

$$V = lr^2 arccos\left(\frac{y}{r}\right) - ly\sqrt{r^2 - y^2}$$

Mit

$$y = r - h$$

erhalten wir

$$V = lr^2 arccos\left(\frac{r-h}{r}\right) - l(r-h)\sqrt{r^2 - (r-h)^2}$$

Mit h = r, d.h. y = 0 erhalten wir wie oben das halbe Zylindervolumen.

Methode3: Nach Bartsch, „Taschenbuch mathematischer Formeln“ ergibt sich das

Zylindervolumen mit dem Winkel α im Bogenmaß:

$$V = l\frac{r^2}{2}(\alpha - sin\alpha)$$

Der Winkel α lässt sich einfach gemäß der Beziehung

$$\alpha = 2\arccos\left(\frac{r-h}{r}\right)$$

berechnen. Dies ist die einfachste bekannte Berechnung des vertikalen Zylindervolumens.

Beispiel:

Die Zylinderlänge sei 1, der Radius r sei ebenfalls 1. Der Winkel α sei 30°, Bogenmaß = 0,5236, Bogenmaß von 15° = 0,2618. cos 15° bzw. cos 0,2618 = 0,96593, d.h. y = 0,9659 und arccos 0,9659 ist ebenfalls = 0,2618. Damit erhalten wir V= 0.0117. Als Zwischenergebnis erhalten wir V_A = 0,2618, V_D = 0,2501 und h = 0,0341.

Volumen des vertikalen elliptischen Bodens:

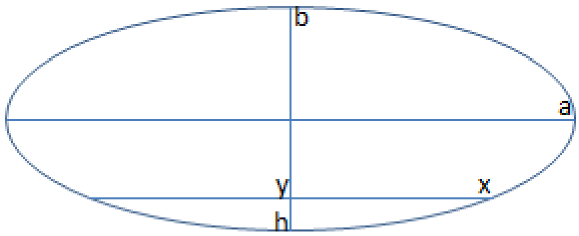

Abb. 3 Skizze des elliptischen Bodens

Darin sind a und b die Achsen der Ellipse, h die Füllhöhe, y = b – h, x ist die Länge des Flüssigspiegels auf der a-Achse. Die untere Hälfte der Ellipse entspricht dem unteren, die obere Hälfte dem oberen Boden. Beim Befüllen des vertikalen Behälters läuft also zunächst der untere Boden voll, dann der Zylinder und zum Schluss der obere Boden.

Die Gleichung der Ellipse lautet:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Daraus erhalten wir

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2)$$

und

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$$

Das Volumen des elliptischen Bodens erhalten wir dadurch, indem wir die Ellipse um die y-Achse rotieren lassen. Würden wir die rotierende Ellipse von oben betrachten, würden wir einen Kreis sehen.

Der Zylinder hat den horizontalen Radius a. Für die Füllhöhe h gilt, solange h < b ist.

$$h = b - y$$

Für die Fläche an der Stelle h gilt

$$A = x^2\pi$$

Für das Schichtvolumen gilt

$$dV = Ady$$

d.h.

$$dV = \pi x^2 dy$$

Die Ellipsengleichung nach x aufgelöst ergibt das Integral:

$$V = \pi \frac{a^2}{b^2} \int_y^b (b^2 - y^2)\, dy$$

aufgelöst

$$V = \pi \frac{a^2}{b^2} \left(\int_y^b b^2\, dy - \int_y^b y^2\, dy \right)$$

Die Lösung dieses Integrals ergibt:

$$V = \pi \left[a^2 (b - y) - \frac{a^2}{3b^2} (b^3 - y^3) \right]$$

Probe:

Setzen wir y = 0, erhalten wir das halbe Volumen der Rotationsellipse. Für das ganze Volumen ergibt sich daraus:

$$V = \frac{4}{3} \pi a^2 b$$

Zum Vergleich: Für das Kugelvolumen gilt die Formel

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Beispiel:

Radius des Zylinders R = 1, d.h. a = 1, b = 0,3. Der Boden werde auf h = 0,1 gefüllt. Damit wird y = b – h = 0,2.

Ergebnis:

V_h = 0,07956

Anm.: für b - y können wir direkt h einsetzen.

Volumen des horizontalen elliptischen Bodens:

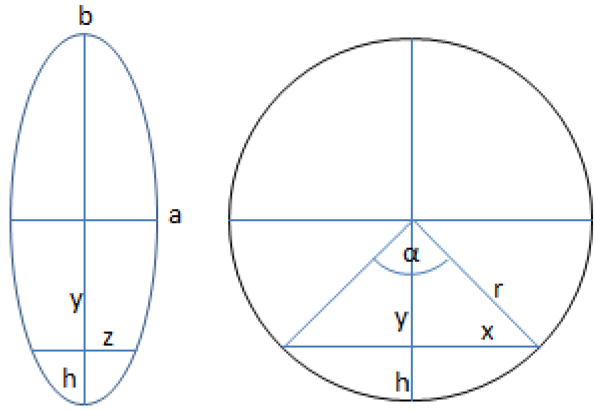

Abb. Skizze des elliptischen Bodens, Seitenansicht, Draufsicht

Die linke Hälfte der Ellipse stellt den linken Boden des horizontalen Behälters, die rechte Hälfte der Ellipse den rechten Boden dar. a und b sind die Ellipsenachsen, z und y die Koordinaten des Flüssigspiegels bei h der Füllhöhe. Wir denken uns die Ellipse um die Zylinderachse a rotiert. In der Draufsicht auf die a-Achse ergibt sich daher ein Kreis mit dem Radius r = b des Behälterzylinders.

Für die Fläche des Flüssigspiegels in der Ellipse bei h gilt

$$A = xz\pi$$

Das Volumen ist

$$dV = Ady$$

Eingesetzt erhalten wir

$$dV = xz\pi dy$$

Da wir über y integrieren, müssen wir x und z durch y ersetzen. Für die Ellipse gilt mit b = r

$$\frac{z^2}{a^2} + \frac{y^2}{r^2} = 1$$

Daraus erhalten wir

$$z = \frac{a}{r}\sqrt{r^2 - y^2}$$

Für den Kreis gilt

$$x = \sqrt{r^2 - y^2}$$

Damit ergibt sich das Volumen

$$dV = \pi\sqrt{r^2 - y^2}\frac{a}{r}\sqrt{r^2 - y^2}dy$$

Daraus erhalten wir

$$dV = \pi a \left(\int_{r-h}^{r} r dy - \frac{1}{r} \int_{r-h}^{r} y^2 \, dy \right)$$

Das Ergebnis der Integration lautet

$$V = \frac{a\pi}{r} \left[hr^2 - \frac{1}{3}(r^3 - (r-h)^3) \right]$$

Wenn wir h = r setzen erhalten wir das halbe Volumen der Rotationsellipse

$$V = \frac{2}{3}\pi a r^2$$

Zum Vergleich: Für das Kugelvolumen gilt die Formel

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Zur Berechnung eines Behältervolumens müssen wir die Füllvolumen der Böden und des Zylinders separat berechnen und addieren. Beim vertikalen Behälter erfolgt die Berechnung in drei Teilen entsprechend des Befüllens. Der erste Teil ist das Befüllen des unteren Bodens bis dieser voll ist, der zweite Teil der des Befüllens des vertikalen Zylinders bis dieser voll ist, der dritte Teil das Befüllen des oberen Bodens bis auch dieser voll ist.

Anmerkung.

Geplant sind numerische Berechnungen in Excel. Darin enthalten sind eine numerische Berechnung der Volumina durch Integration nach Simpson sowie der Nachweis, dass alle Gleichungen übereinstimmen. Solange dieser Nachweis nicht erbracht ist, kann für die Richtigkeit der Gleichungen keine Garantie übernommen werden. Für kritische Hinweise bin ich dankbar.

Version 1.0, Januar 2014

Autor: W. Schmidt